

КОСТАНАЙСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

## **МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ПСИХОЛОГИИ**

Учебное пособие

КОСТАНАЙ – 2016

УДК 519.22.(075.8)  
ББК 22.172.я 73  
К17

Автор-составитель:

Калжанов М.У., доцент, кандидат физико-математических наук

Рецензенты:

Тастанов М.Г. кандидат физико-математических наук, доцент кафедры информатики и математики КГУ им. А.Байтурсынова

Смаглий Т.И. зав. кафедрой психологии КГПИ, кандидат педагогических наук

К 17 Калжанов М.У. Математические методы в психологии: учебное пособие // М.У. Калжанов. – Костанай: Изд-во КГПИ, 2016. – 101 с.

ISBN 978-601-7839-24-6

В учебном пособии даны основные математические модели, используемые в психологии. Представлены основные статистические понятия, алгоритм подготовки данных к математической обработке.

Изложены основные виды распределений и различные меры связи между переменными, в том числе изменчивости, центральной тенденции, различий, связи и зависимости, основные теоретические вопросы подкреплены многочисленными задачами и методами их решения.

Учебное пособие предназначено для студентов специальности «Психология», а также для психологов-практиков, имеющих дело со сбором и статистической обработкой материала, его количественным анализом и конструированием различных математических моделей психических явлений, процессов, состояний

УДК 519.22.(075.8)  
ББК 22.172.я 73

Рекомендовано к изданию Ученым Советом Костанайского  
государственного педагогического института

ISBN 978-601-7839-24-6

© КГПИ, 2016

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	5
ГЛАВА 1 Измерения в психологии .....	6
1.1 Понятие об измерении.....	6
1.2 Особенности измерения в психологии .....	8
1.3 Шкалы измерений .....	10
ГЛАВА 2 Основные статистические понятия.....	13
2.1 Генеральная и выборочная совокупности.....	13
2.2 Переменная величина .....	13
2.3 Уровни значимости .....	14
2.4 Достоверность результатов исследования .....	15
ГЛАВА 3 Подготовка данных к математической обработке .....	17
3.1 Протоколирование данных.....	17
3.2 Составление сводных таблиц .....	18
3.3 Определение квантилей.....	19
3.4 Графическое представление данных .....	21
ГЛАВА 4 Меры центральной тенденции.....	22
4.1 Мода .....	22
4.2 Медиана .....	22
4.3 Среднее арифметическое значение .....	23
4.4 Среднее геометрическое значение .....	24
Задача 4.1 .....	25
Задача 4.2 .....	25
Задача 4.3 .....	26
ГЛАВА 5 Меры изменчивости признака.....	27
5.1 Лимиты (пределы).....	27
5.2 Размах вариаций.....	27
5.3 Среднее отклонение .....	28
5.4 Дисперсия.....	28
5.5. Среднеквадратичное (стандартное) отклонение .....	29
5.6. Коэффициент вариации .....	29
Задача 5.1 .....	29
Задача 5.2 .....	30
ГЛАВА 6 Распределение переменных величин .....	31
6.1 Нормальное распределение .....	31
6.1.1 Основные понятия .....	31
6.1.2 Коэффициент асимметрии .....	33
6.1.3 Коэффициент эксцесса.....	35
6.1.4 Критерий хи-квадрат ( $\chi^2$ ) .....	36
6.1.5 Критерий Колмогорова-Смирнова ( $\lambda$ ) .....	38
6.2 Равномерное распределение .....	41

6.3 Биноминальное распределение .....	43
6.4. Распределение Пуассона.....	45
Задача 6.1 .....	47
Задача 6.2 .....	47
Задача 6.3 .....	47
ГЛАВА 7 Меры различий .....	48
7.1 Постановка проблемы .....	48
7.2 Непараметрический критерий Q Розенбаума .....	49
7.3 U – критерий Манна-Уинтни .....	50
7.4 Критерий Стьюдента.....	52
7.5 Критерий Фишера .....	54
7.6 Критерий $\varphi^*$ – угловое преобразование Фишера .....	55
7.7 Использование критерия $\chi^2$ Пирсона и критерия $\lambda$ Колмогорова для оценки различий между двумя выборками .....	56
Задача 7.1 .....	59
Задача 7.2 .....	59
Задача 7.3 .....	59
ГЛАВА 8 Меры связи .....	61
8.1 Постановка проблемы .....	61
8.2 Представление данных .....	61
8.3 Коэффициент корреляции Фехнера.....	62
8.4 Коэффициент корреляции Пирсона.....	63
8.5 Коэффициент ранговой корреляции Спирмэна .....	67
8.6 Коэффициент ранговой корреляции Кендалла.....	69
8.7 Дихотомический коэффициент корреляции ( $\varphi$ ).....	70
8.8 Точечный бисериальный коэффициент корреляции ( $r_{pb}$ ) .....	72
8.9 Рангово-бисериальный коэффициент корреляции ( $r_{rb}$ ) .....	73
8.10 Выбор меры связи .....	74
8.11 Матрица корреляций.....	74
Задача 8.1 .....	76
Задача 8.2 .....	76
Задача 8.3 .....	77
ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ .....	78
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	80
ПРИЛОЖЕНИЕ. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ .....	81

## ВВЕДЕНИЕ

Предлагаемые математические методы используются для планирования эксперимента и прогнозирования предполагаемых оценок, для статистической обработки результатов психологического исследования с использованием ЭВМ и специализированных программ обработки психологических данных, а также для разработки и построения математических моделей, касающихся различных процессов и состояний.

Основным методом психологического исследования (если не брать во внимание чисто экспериментальные области психологии) традиционно является метод наблюдения. Несмотря на некоторые положительные стороны этого метода, наблюдение всегда является в значительной степени субъективным. Интерпретация полученных данных, как правило, несет на себе отпечаток личности психолога, его опыта, интуиции и т. д.

Во многих случаях возникает задача формализации результатов исследования и их более или менее однозначной трактовки. В этом смысле математика представляет собой универсальным и формализованным языком, описывающим различные психологические свойства исследуемых объектов, признаки, изменения.

Предлагаемое учебное пособие ставит своей задачей помочь психологу овладеть начальными знаниями, необходимыми для применения математических методов в психологии. При этом было сведено к минимуму освещение теоретических вопросов, которые подробно излагаются в соответствующих учебниках по теории вероятностей и математической статистике.

Основная же задача пособия – дать психологу рабочий инструмент для решения конкретных научно-исследовательских и прикладных задач.

Предлагаемые темы подразумевает определенный уровень знаний в области теории вероятностей и математической статистики.

Большинство глав учебного пособия сопровождаются перечнем задач по рассматриваемой теме. В конце пособия приводятся минимум справочных статистических таблиц, необходимых для математической интерпретации и выводов по каждой из рассматриваемых задач.

Учебное пособие предназначено для студентов изучающих психологию, а также для психологов-практиков, имеющих дело со сбором и статистической обработкой материала, его количественным анализом и конструированием различных математических моделей психических явлений, процессов, состояний.

## ГЛАВА 1 ИЗМЕРЕНИЯ В ПСИХОЛОГИИ

Начальным этапом математической обработки результатов любого (в том числе и психологического) исследования, является *измерение*, то есть, изучаемый признак (свойство, черта, характеристика) должен быть измерен, т. е. выражен в той или иной количественной (численной) форме. Численное выражение признака может быть различным – от представления его в бинарной системе (1 – наличие признака, 0 – отсутствие признака) до весьма точных количественных значений (например, максимальная амплитуда альфа-ритма электроэнцефалограммы для данного испытуемого составляет 95 микровольт).

Одной из достаточно сложных в психологии является задача математической формализации изучаемого признака, т. е. перевода ее в количественное выражение для изучения объектов и их взаимосвязей.

В предлагаемой главе даны общие сведения об измерении вообще и об особенностях измерения психологических свойств (признаков, черт, характеристик) в частности.

### 1. 1. Понятие об измерении

Понятие измерение имеет много определений. Так, измерение иногда трактуют как познавательный процесс, включающий исследование количественных характеристик материальных объектов с помощью соответствующих измерительных приборов. Такая формулировка вполне подходит для физического измерения, но не всегда годится для измерения психологических величин. Чаще всего процедуры психологического измерения подразумевают наличие не измерительных приборов, а совокупности заданий, вопросов, утверждений и т. д.

Тем не менее, в некоторых областях психологической науки (психофизика, психофизиология и др.) предусматривается использование и приборных (аппаратурных) методов измерения.

Другое определение термина: измерение есть присваивание чисел определенным объектам, свойствам, признакам, событиям или изменениям в соответствии с определенными правилами. Это определение больше подходит к измерению в психологии, хотя справедливости ради необходимо отметить, что не все психологические величины можно выразить числом – некоторые из них выражаются качественными определениями, названиями, символами и пр.

И наконец, измерение можно определить как построение шкал посредством изоморфного отражения эмпирической системы с отношениями в численной системе с отношениями. Другими словами, это определение фактически ставит знак равенства между измерением и шкалированием. В первом приближении это так, хотя в некоторых случаях понятие *шкалирование* шире понятия *измерение* и включает в себя

упорядочение не только численных (количественных), но и качественных характеристик.

Любой вид измерения предполагает наличие вполне определенных единиц измерения. Единица измерения – это та «измерительная палочка» (по выражению С. Стивенса), которая является своеобразным эталоном для осуществления тех или иных измерительных операций. В физике и других естественнонаучных дисциплинах используют основные и производные единицы измерения. Основных единиц измерения относительно немного: в Международной системе единиц (СИ) это килограмм (кг) – единица массы, метр (м) – единица расстояния, секунда (с) – единица времени, градус Кельвина ( $^{\circ}\text{K}$ ) – единица температуры, ампер (А) – единица силы тока, кандела (кд) – единица силы света и моль – единица количества вещества. Все остальные единицы (скорость, плотность, освещенность, давление и др.) являются производными и выводятся из основных единиц измерения.

Кроме общепринятых (международных) единиц измерения, иногда применяются и традиционные (национальные) единицы (фунты, унции, дюймы, ярды, футы и пр.), использование которых в научных исследованиях весьма ограничено.

Физические единицы измерения используются в психологических исследованиях далеко не всегда. В ряде случаев, например, в психофизике, представляется разумным, чтобы субъект оценивал какие-либо величины или находил степень различия между ними в общепринятых единицах (например, промежутки времени в минутах и секундах, длину линий – в сантиметрах, расстояние до объекта – в метрах и т. д.). Общепринятые единицы измерения используются и в психофизиологии.

Так, время сенсомоторных реакций и время опознания образов принято измерять в секундах или миллисекундах, амплитуду вызванных потенциалов – в микровольтах, частоту ритмов электроэнцефалограммы выражают числом колебаний в секунду и т. д. Тем не менее, чаще всего психологи в своих измерениях пользуются условными единицами («сырыми» баллами, стенами и т. д.). Так, при использовании большинства тестов-опросников в качестве единицы измерения выступают ответы «да» или «нет».

Исследуемое же свойство вычисляется на основе соотношения этих ответов (их суммы, разности и т. п.). При выполнении «интеллектуальных» тестов в качестве единицы измерения выступает решение каждой отдельной задачи (выполнение отдельного задания), а исследуемый признак (коэффициент интеллекта и пр.) определяется по числу выполненных заданий.

## 1. 2. Особенности измерения в психологии

Впервые мысль о возможности измерения психических явлений, процессов и состояний высказал немецкий философ *Густав Теодор Фехнер* (1801–1887). В своей фундаментальной работе «Элементы психофизики» он писал так: «...трудно возразить против того, что духовное вообще подчинено количественным отношениям. Ведь можно говорить не только о большей или меньшей силе ощущения, но и о разной силе влечений, о том, что существует большая или меньшая степень внимания, живости воспоминаний или образов фантазии, ясности сознания в целом, а также интенсивности отдельных мыслей... Таким образом, высшее духовное не в меньшей степени, чем чувственное... может быть охарактеризовано количественно» (Fechner, 1966).

Несмотря на длительную полемику по поводу возможности количественного описания психических явлений, процессов и состояний, которая развернулась после выхода в свет книги Фехнера, на сегодняшний день трудно представить психологическую науку без измерения. Психофизика, психофизиология, психометрика, психодиагностика – вот далеко не полный перечень психологических дисциплин, в которых измерение является важным инструментом.

Иногда говорят, что измерение психических величин, зачастую основанное на субъективных отчетах испытуемых, не внушает доверия только потому, что оно субъективно. Не вдаваясь в философскую сторону проблемы, можно сказать, что психологические измерения так же надежны и валидны, как и измерения физические, но обладают своими особенностями. Основные свойства психологического измерения – это его многофакторность и вариативность.

*Многофакторность* измерения в психологии состоит в том, что на психологические величины оказывает влияние множество различных факторов, одни из которых (релевантные) непосредственно связаны с измеряемым признаком, другие (иррелевантные) не связаны с ним или связаны косвенно.

Влияние всех иррелевантных факторов учесть невозможно. Однако чем большее их число будет учтено, тем более действенна данная методика, более валидна та или иная математическая модель, более точен тот или иной психологический прогноз.

Существует наиболее оптимальный способ преодоления трудностей, связанных с многофакторностью психологических измерений. Так, если на измеряемый психологический признак оказывает действие большое число разнообразных факторов, то априорно принимается точка зрения, что все эти многообразные и разнонаправленные факторы в конечном счете уравнивают друг друга, и исследуемый признак варьирует *случайным образом*.

Именно на принципе случайности берет развитие целая область математической науки – теория вероятностей. Поэтому многие матема-

тические методы, применяемые в психологии, основаны именно на вероятностной теории и случайных процессах.

Более того, существуют специальные методы и приемы, позволяющие определить, изменяется ли исследуемый признак случайным образом или неслучайно. Если психологическое свойство (признак) – случайная величина, то к нему применимы основные статистические критерии; если признак изменяется неслучайно, следует выявить и по возможности устранить (или минимизировать) тот фактор, который вносит систематическую ошибку. Если же это не представляется возможным, следует использовать так называемые *непараметрические методы* статистической обработки полученных результатов.

*Вариабельность (вариативность)* психологических измерений состоит в том, что психологические величины (признаки, переменные) зачастую принимают значения, весьма отличающиеся друг от друга. Поэтому, наряду с мерами центральной тенденции (мода, медиана, среднее значение), в психологии всегда приходится учитывать и вариабельность (изменчивость) измеряемого признака. Подтверждено, что вариабельность переменных сама по себе является весьма информативным показателем. Разработано большое количество статистических методов, основанных именно на анализе вариабельности – дисперсионный, корреляционный, факторный анализ и др.

В различных предметных областях и разделах психологии измерение имеет свою специфику. Так, психофизические измерения предусматривают, как правило, использование двух шкал: первая – это шкала физических единиц (сила света, звука, пространственные, временные параметры сигнала и т. д.), вторая – субъективная (шкала суждений, оценок и пр.), которая может быть выражена в терминах номинальной, порядковой, интервальной шкалы или шкалы отношений

В случаях неметрического шкалирования правило, оперирует только субъективными шкалами.

Двойственная метрика предполагается и в психофизиологических исследованиях. Физиологические процессы в организме человека измеряются специальными приборами и выражаются в общепринятых физических единицах – секундах, герцах, микро- и милливольты и т. д. В то же время психические процессы, сопутствующие физиологическим изменениям в организме, измеряются в терминах субъективного самоотчета испытуемых.

Особое место занимают измерения в психодиагностике, поскольку они включают в себя, с одной стороны, систему субъективных отчетов или невербальных операций субъекта, с другой – систему условных приемов и методов оценки психологических показателей.

В заключение необходимо отметить, что, несмотря на вариативность и многофакторность психологических величин, измерение в психологии является неотъемлемым и важным этапом психологических

исследований, позволяющим с определенной степенью точностью и надежностью описывать разнообразные психические процессы и явления.

### 1. 3. Шкалы измерений

*Шкала* в широком понимании этого слова представляет собой упорядоченную совокупность данных. То есть, если в психологическом эксперименте (наблюдении, опросе и т. д.) получены какие-либо результаты (данные) и определенным образом они упорядочиваются, то можно конструировать шкалу.

В самом общем смысле различают четыре типа шкал измерений: номинальную, порядковую, интервальную и шкалу отношений.

**Номинальная (номинативная) шкала**, или **шкала наименований** состоит в присваивании какому-либо свойству или признаку определенного обозначения или символа (численного, буквенного и др.). По сути, это – классификация свойств, группировка объектов, объединение их в классы при условии, что объекты, принадлежащие к одному классу, идентичны (аналогичны) или, по меньшей мере, сходны друг с другом в отношении какого-либо признака или свойства, тогда как объекты, различающиеся по этому признаку, попадают в разные классы.

Примеры:

1) классификация вкусовых качеств:

*A* – сладкое, *B* – горькое, *C* – кислое, *D* – соленое;

2) цвета видимого спектра: *A* – красный, *B* – зеленый, *C* – синий и пр.;

3) распределение людей по типам темперамента:

*A* – холерики, *B* – сангвиники, *C* – флегматики, *D* – меланхолики.

Независимо от характера обозначения групп, классов (буквенные или численные), номинальная шкала определяет, что разные классы отличаются друг от друга лишь в качественном отношении, но не подразумевает каких-либо количественных операций с ними. Так, исходя из приведенных выше примеров, нельзя сказать, что  $A > B$  или  $B < C$ , можно лишь утверждать, что *A* нетождественно *B*, *B* отличается от *C* и т. д.

Номинальная шкала допускает любые замены и перестановки буквенных (численных) обозначений.

Частным случаем номинальной шкалы является **дихотомическая шкала наименований**, когда свойство или признак может принимать только два значения, например:

*A* (1): мужчина            верующий            успевающий            демократ

*B* (0): женщина            атеист            неуспевающий            коммунист

**Ординарная (порядковая, ранговая) шкала** предполагает ранжирование определенного признака или свойства так, что  $A > B > C > \dots$  (или наоборот). Порядковое измерение возможно тогда, когда в объектах можно обнаружить различия в степени выраженности признака или свойства. Шкала порядка не предусматривает меры (степени)

различий между элементами ряда. Другими словами, можно констатировать, что объект (признак, свойство)  $A$  имеет преимущество над  $B$ ,  $C$  над  $D$  и т. д., но не можем сказать, в каком случае это преимущество выражено в большей или меньшей степени. Ранговая шкала задает лишь порядок следования объектов в соответствии со степенью выраженности того или иного признака.

Примеры:

1) места, занятые студентами (школьниками) в соревновании (олимпиаде и пр.);

2) ранг (место) студента по среднему баллу успеваемости;

3) в психодиагностике (например, тест Спилбергера):

утверждение: Я спокоен, собран, хладнокровен

оценка: 1 (никогда) 2 (иногда) 3 (часто) 4 (всегда).

Допустимая операция – реверсия шкалы. В случае количественных обозначений не допускается никаких перестановок внутри ранжированного ряда. Допустимая статистика: медиана, проценты, ранговая корреляция по Спирмену, Кендаллу и т. д.

**Интервальная шкала (шкала интервалов)** предполагает разбиение диапазона (расстояния) между двумя крайними (реперными) точками на определенное число равных интервалов (градаций, категорий).

На интервальной шкале нет естественной точки отсчета: нуль условен, он не указывает на отсутствие измеряемого свойства. Шкала допускает операции нахождения разности, суммы и среднего значения и не изменяется при преобразовании  $x \rightarrow x + a$  (сложение или вычитание). Эти свойства шкалы позволяют количественно сравнивать между собой различия между парами признаков, например:  $A - B > C - D$ . Тем не менее, шкала не допускает нахождения отношений величин признака (т. е. *во сколько раз* одна величина больше или меньше другой). Это можно проиллюстрировать следующим примером. Допустим, вчера температура воздуха была +5, а сегодня +10 градусов по шкале Цельсия. Можно констатировать, что сегодня на 5 градусов теплее, чем вчера, но вряд ли можем сказать, что сегодня потеплело в два раза (если выразить те же температуры, например, в градусах Фаренгейта, то мы получим, соответственно, +41 и +50 градусов).

Необходимо отметить, что подавляющее большинство шкал, рассматриваемых в психодиагностике, являются порядковыми или интервальными шкалами.

**Шкала отношений** предполагает наличие естественного нуля, который означает полное отсутствие какого-либо свойства или признака. Шкала отношений является наиболее информативной шкалой, допускает любые математические операции и использование различных статистических приемов. Шкала не изменяется при преобразовании  $x \rightarrow bx$ . Это означает, в частности, что отношение двух величин не зависит от выбора единиц измерения. Если, например, имеется два груза с массой

соответственно  $m_1$  и  $m_2$  и обнаруживаем, что  $m_1 : m_2 = 1 : 2$ , то отношение не изменится, если измерить массу этих грузов в граммах, фунтах, унциях или любых других единицах. В то же время для шкал отношений неправомерна операция  $x \rightarrow x + a$ , т. е. не допускается никакого линейного сдвига относительно нулевой точки. Так, если  $100 : 200 = 1 : 2$ , то  $(100 + 10) : (200 + 10) \neq 1 : 2$ .

Большинство измерительных шкал физических характеристик (пространство, время, масса, объем, скорость и пр.), используемых, в частности, в психофизике, являются шкалами отношений. Шкалы отношений используются также и в психофизиологии, где отсчет различных физиологических характеристик также ведется от естественного нуля.

Оперирование различными математическими методами предполагает изначальное определение типа шкалы исследуемого признака. Если тип шкалы определен неверно, то исследователь может выбрать неадекватный метод статистической обработки и прийти в результате к неверным выводам.

## ГЛАВА 2 ОСНОВНЫЕ СТАТИСТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

### 2. 1. Генеральная и выборочная совокупности

*Генеральная совокупность* представляет собой массив данных одной категории. Например ставится задача исследовать коэффициент интеллекта (IQ) школьников выпускных классов школ некоторого города, то генеральной совокупностью будут являться все школьники всех выпускных классов всех школ города.

Обычно генеральная совокупность включает в себя очень большое число субъектов (испытуемых) – студентов вузов, школьников, работников предприятий, военнослужащих, пенсионеров и др. Сплошное исследование генеральных совокупностей чрезвычайно затруднительно, а зачастую практически и невозможно. Поэтому, как правило, изучается часть генеральной совокупности, называемая *выборочной совокупностью*, или *выборкой*.

*Выборка (выборочная совокупность)* – это такая группа объектов, которая должна удовлетворять следующим условиям:

1. Это группа объектов, доступная для изучения. Объем выборки определяется задачами и возможностями наблюдения и эксперимента.
2. Это часть заранее намеченной генеральной совокупности.
3. Это группа, отобранная случайным образом так, чтобы любой объект генеральной совокупности имел одинаковую вероятность попасть в выборку.

Основное и главное свойство выборочной совокупности – *репрезентативность*. Репрезентативность – это способность выборки характеризовать соответствующую генеральную совокупность с определенной точностью и достаточной надежностью.

*Ошибки репрезентативности* могут возникать в двух случаях:

1. Если выборка, характеризующая генеральную совокупность, мала. Так, если проведены исследования в группе, состоящей из 10 школьников 11-го класса какой-либо школы города, то вряд ли можно экстраполировать полученные данные на всю генеральную совокупность.
2. Свойства (параметры) выборки не совпадают с параметрами генеральной совокупности. Такое явление может наблюдаться в тех случаях, когда нарушается принцип случайности при отборе испытуемых.

### 2. 2. Переменная величина

*Переменная величина* (или просто *переменная*) – количественно измеряемое свойство или признак, принимающие различные значения. В качестве переменных могут выступать различные психические признаки – время решения задачи, количество допущенных ошибок,

уровень тревожности или нейротизма, коэффициент интеллекта и многое другое.

Значения переменных могут изменяться либо непрерывно, либо дискретно. Так, в большинстве психофизиологических исследований измеряемые величины, в принципе, непрерывны, и точность их измерения зависит от точности измерительного устройства (прибора). Дискретные значения переменных встречаются в большинстве психодиагностических процедур, где измеряемый параметр чаще всего принимает целочисленные значения – количество положительных и отрицательных ответов, число правильно решенных задач (выполненных заданий) и т.д.

Принято считать, что психологические переменные являются случайными величинами, так как они испытывают на себе влияние многочисленных и разнообразных факторов и невозможно предсказать заранее, какое значение они примут.

Математическая обработка – это оперирование со значениями признака (переменной), полученными у испытуемых в процессе психологического исследования. Методы математической обработки весьма разнообразны. Это может быть построение распределения частот измеряемого признака, вычисление мер центральной тенденции, мер изменчивости (вариабельности) признака, определение характера связи между разными переменными, установление формы зависимости одного признака от другого, влияние тех или иных факторов на величину признака и многое другое.

Поскольку большинство изучаемых в психологии переменных не являются жестко детерминированными величинами, то большинство математических методов основано на основах теории вероятностей. Это касается и выводов, которые делает исследователь в результате математической обработки полученных данных.

Любой вывод или прогноз может быть сделан лишь с определенной вероятностью ( $P = 0 \div 1$ ). Для характеристики этой вероятности используется понятие уровней значимости.

### **2. 3. Уровни значимости**

*Уровень значимости* (иначе, *порог достоверности*,  $\beta$ ) является показателем вероятности безошибочных выводов и прогнозов. Чаще всего в статистике используются четыре стандартных уровня значимости – нулевой ( $\beta_0 = 0,90$ ), первый ( $\beta_1 = 0,95$ ), второй ( $\beta_2 = 0,99$ ) и третий ( $\beta_3 = 0,999$ ). Другими словами, если исследователь задает нулевой уровень значимости, то его выводы и прогнозы справедливы в 90% случаев (вероятность равна 0,90); если первый уровень – в 95% случаев и т. д. Большинство существующих статистических таблиц основаны именно на этих «стандартных» уровнях, хотя с помощью современной компьютерной техники можно решать и обратную задачу – по

результатам исследования определять тот уровень значимости, на котором можно сделать безошибочный вывод (например,  $\beta = 0,978$ ).

Необходимо отметить, что в психологических исследованиях уровень значимости 0,95, как правило, вполне достаточен для формулировки тех или иных выводов и прогнозов. Более высокие уровни ( $\beta_2$  и  $\beta_3$ ) в ряде психологических исследований почти недостижимы и используются тогда, когда к исследованию предъявляются повышенные требования (работа по важному социальному заказу и пр.).

Важно иметь в виду, что работа на каждом уровне значимости предполагает минимальный объем выборочной совокупности, на которой проводится исследование. Так, если объем выборки ( $n$ ) – от 20 до 30 испытуемых, то можно использовать только нулевой уровень значимости ( $\beta_0$ ), при  $n \geq 30$  – нулевой и первый уровень, при  $n \geq 100$  –  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  и  $\beta_2$ , и, наконец, при  $n \geq 200$  – все четыре уровня ( $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  и  $\beta_3$ ). При малочисленных выборках ( $n < 20$ ) предпочтительнее пользоваться методами непараметрической статистики, поскольку определить характер распределения исследуемого признака на такой выборке не представляется возможным.

Некоторые исследователи в качестве уровня значимости используют величину  $\alpha$  (или  $p$ ), равную  $1 - \beta$ . В этом случае уровни значимости приобретают следующий вид:  $\alpha_0 \leq 0,10$ ;  $\alpha_1 \leq 0,05$ ;  $\alpha_2 \leq 0,01$  и  $\alpha_3 \leq 0,001$ . Логический смысл этих величин состоит в том, что они характеризуют вероятность случайности (вероятность ошибочных прогнозов). Другими словами, это та вероятность, которая приходится на долю случайных (как правило, непредсказуемых) факторов.

Какой именно критерий ( $\alpha$  или  $\beta$ ) использовать при статистической обработке – дело самого исследователя, поскольку принципиального значения это не имеет.

## **2. 4. Достоверность результатов исследования**

О *статистической достоверности* (статистической значимости) результатов психологического исследования можно говорить в тех случаях, когда статистический критерий (мера различий, связи, зависимости, влияния и т. д.) превышает стандартное (критическое) табличное значение для данного уровня значимости.

Так, например, для сравнения между собой двух независимых выборок по критерию Стьюдента стандартное значение, определяемое по соответствующей таблице ( $t_{кр.}$ ), равно 2,57. В то же время значение критерия Стьюдента, вычисленное по экспериментальным данным ( $t_{эсп.}$ ), составляет 2,63. В данном случае  $t_{эсп.} > t_{кр.}$ , и различия между двумя выборками считаются статистически достоверными (статистически значимыми). Если же  $t_{эсп.} < t_{кр.}$  (например,  $t_{эсп.} = 2,54$ ), то различия называются недостоверными (они могут возникнуть в результате

случайных вариаций признака). При равенстве показателей ( $t_{\text{эксп.}} = t_{\text{кр.}}$ ) достоверность различий подвергается сомнению (иногда говорят, что различия лежат на границе достоверности).

Аналогичные выкладки справедливы и в других случаях, когда определяется достоверность связи (корреляции) между переменными, или значимости влияния того или иного фактора

Исключение составляют некоторые непараметрические критерии, например, критерий Манна – Уитни или критерий Вилкоксона, где степень различий или влияния считается статистически значимой, когда эмпирически полученное значение критерия меньше критического (табличного).

Особое место занимают меры соответствия экспериментального распределения теоретическому. В этом случае соответствие считается статистически значимым, если величина критерия, вычисленная по экспериментальным данным меньше табличной для данного уровня значимости.

## **ГЛАВА 3**

### **ПОДГОТОВКА ДАННЫХ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ**

Прежде чем приступать к математической обработке результатов психологического исследования, экспериментальный материал необходимо соответствующим образом подготовить. При этом психологу следует соблюдать два неперенных условия.

Во-первых, данные должны быть представлены в наиболее компактной, удобной для обработки форме. Во-вторых, при упорядочении данных должен быть сохранен максимум содержащейся в них информации.

Подготовка данных к математической обработке включает в себя ряд последовательных этапов: протоколирование, табулирование данных, создание таблиц сгруппированных частот, построение диаграмм или полигона распределения частот и т. д. Рассмотрим все этапы более подробно.

#### **3. 1. Протоколирование данных**

Если психолог имеет под рукой персональный компьютер, задача протоколирования значительно упрощается. Любой программист может составить соответствующую базу данных, и все необходимые сведения о каждом испытуемом можно заносить в компьютер.

Несомненное удобство компьютерного варианта состоит в том, что в любой момент можно извлекать информацию об интересующем нас контингенте испытуемых – по полу, возрасту, социальной принадлежности и др. При отсутствии такой возможности на каждого испытуемого составляется отдельный протокол.

В протоколе необходимо отмечать фамилию и инициалы испытуемого, пол и возраст (за исключением случаев анонимного обследования, когда указываются только инициалы, пол и возраст). Несоблюдение этих требований делает невозможным дальнейший анализ результатов (в тех случаях, когда нас интересует связь исследуемой переменной с возрастом и полом испытуемых).

Весьма желательно указывать в протоколе дату исследования. Это особенно важно в тех случаях, когда исследование одной и той же выборки проводится повторно (период времени между повторными исследованиями, например, две недели или полгода) имеет большое значение, особенно когда речь идет о детях.

В некоторых случаях необходимо указывать время суток, когда проводилось исследование. Так, некоторые психологические и психофизиологические переменные (время сенсомоторной реакции, концентрация и переключаемость внимания, объем оперативной памяти и др.) в значительной мере зависят от уровня активности субъекта, степени его утомления, которые далеко не одинаковы в разное время суток.

При необходимости в протоколе следует отмечать условия опыта (проводилось ли исследование индивидуально или в группе, наличие внешних помех и т. д.). Все другие данные о каждом или отдельных испытуемых исследователь отмечает по своему усмотрению, т. е. фиксируется то, что психолог считает наиболее важным.

### 3. 2. Составление сводных таблиц

Использование индивидуальных протоколов для математической обработки результатов не очень удобно. Для того, чтобы представить материал в более компактном виде, данные сводятся в итоговую таблицу следующего вида:

№№ п/п.	Фамилия, имя, отчество	Другие данные (если необходимо)	Исследуемый показатель
1			
2			
3			
...			
$n$			

В ряде случаев перед составлением сводной таблицы проводится *ранжирование данных*. Оно, в частности, необходимо при определении квантилей. Для этого данные выстраиваются в общий ряд по исследуемому признаку в порядке его возрастания (или убывания) следующим образом:  $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq \dots \leq x_n$  (или наоборот), где  $n$  – общее число значений признака (объем выборки). Знак «меньше или равно» предполагает, что у разных испытуемых могут встречаться одинаковые значения переменной.

Иногда даже итоговые таблицы могут оказаться довольно громоздкими и не вполне удобными для дальнейшей обработки. В этом случае материал можно сделать еще более компактным, составляя частотные таблицы (*таблицы распределения частот исследуемого признака*):

№№ пп.	1	2	3	4	...	$n - 1$	$n$
$x_i$							
$f_i$							

В первой строке дается номер значения переменной в ранжированном ряду, во второй – конкретное значение (величина признака) и в третьей – частота встречаемости признака (число одинаковых значений признака в выборке).

Для того чтобы полученные данные представить в еще более компактном виде, используются таблицы *распределения сгруппированных частот*. Для составления такой таблицы необходимо:

1) общий диапазон изменения признака разделить на ряд поддиапазонов (классов) при условии, что ширина всех классов должна быть одинакова;

- 2) определить границы классов и их число в общем диапазоне;
- 3) подсчитать частоты встречаемости признака в каждом классе.

Обычно для построения распределения сгруппированных частот используется 7 – 15 классов. Для наиболее точного разбиения диапазона на классы (если в дальнейшем предполагаются математические операции с этими классами) можно использовать формулу Стэрджесса:  $N = 1 + 3,322 \lg n$ , где  $n$  – объем выборки (количество значений признака), а  $N$  – количество классов. Так, например, если  $n = 100$ , то  $N = 1 + 3,322 \cdot 2 \approx 8$ .

#### Пример

На выборке испытуемых численностью 100 человек определялся коэффициент интеллекта (IQ). Минимальное значение IQ оказалось равным 72, а максимальное – 134. Для составления таблицы сгруппированных частот используем 8 классов (в соответствии с формулой Стэрджесса). Определяем общий диапазон изменения признака – он будет соответствовать разнице между минимальным и максимальным значениями:  $134 - 72 = 62$ . Следовательно, в каждый класс должно попадать по 8 значений признака (при разбиении на классы можно слегка расширить диапазон с тем расчетом, чтобы в каждом классе оказалось одинаковое число значений и чтобы крайние значения не оказались за пределами диапазона). В соответствии с этим определяем границы классов и составляем таблицу сгруппированных частот:

Номер класса ( $N$ )	1	2	3	...	8
Границы класса ( $x_{\min} \div x_{\max}$ )	72 ÷ 79	80 ÷ 87	88 ÷ 95	...	128 ÷ 135
Среднее значение ( $\bar{x}$ )	75,5	83,5	91,5	...	131,5
Частоты ( $f_i$ )	1	7	32	...	2
Накопленные частоты ( $F_i$ )	1	8	40	...	100

Накопленные частоты, приведенные в 5-й строке, могут быть использованы в некоторых статистических расчетах (например, для вычисления критерия  $\lambda$  по Колмогорову). Накопленные частоты вычисляются путем простого суммирования частот от 1-го до  $N$ -го класса:  $F_1 = f_1$ ;  $F_2 = f_1 + f_2$ ;  $F_3 = f_1 + f_2 + f_3$  и т. д.

### **3. 3. Определение квантилей**

*Квантиль* – точка на числовой оси (значение признака), делящая совокупность наблюдений в определенной пропорции. Определение квантилей достаточно часто используется в психодиагностических процедурах (при определении тестовых норм и т. д.). Для определения квантилей необходимо иметь ряд значений исследуемого признака, ранжированных в порядке возрастания величины.

Различают несколько разновидностей квантилей:

а) *квартили* ( $Q$ ) делят совокупность наблюдений (ранжированный ряд) на 4 равные части: 1-й квартиль ( $Q_1$ ) делит ряд в соотношении

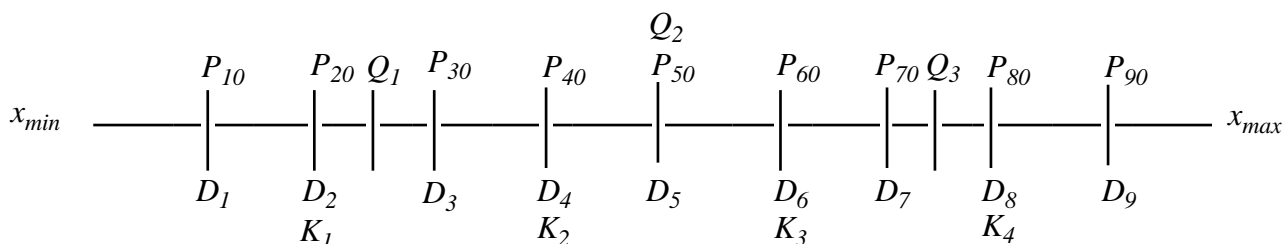
25:75%, 2-й ( $Q_2$ ) – в соотношении 50:50% и 3-й ( $Q_3$ ) – в соотношении 75:25%.

б) *квинтили* ( $K$ ) делят выборку на 5 равных частей:  $K_1$  – в соотношении 20:80%,  $K_2$  – 40: 60%,  $K_3$  – 60:40%,  $K_4$  – 80:20%.

в) *децили* ( $D$ ) делят ранжированный ряд на 10 равных частей:  $D_1 = 10\%$ ,  $D_2 = 20\%$ , ...  $D_9 = 90\%$ .

г) наконец, *процентили* ( $P$ ) делят совокупность наблюдений на 100 частей (в процентном отношении).

Соотношения квантилей можно представить в виде следующей схемы:



### Пример

На 20 испытуемых определялся уровень личностной тревожности (УЛТ) по тесту Спилбергера. При ранжировании значений признака получен следующий вариационный ряд (см. таблицу). Задача состоит в том, чтобы определить значения 1-го, 2-го и 3-го квантилей.

№№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
УЛТ	31	32	32	34	36	36	36	37	39	41	42	42	43	44	45	45	45	46	47	48

$$Q_1 = 36 \quad Q_2 = 41,5 \quad Q_3 = 45$$

Для определения значений квантилей разбиваем ранжированный ряд на 4 равные части (по 5 значений признака). 1-й квантиль располагается между 5-м и 6-м значениями ряда, оба из которых соответствуют 36. Следовательно,  $Q_1 = 36$ . 2-й квантиль расположен между 10-м значением, равным 41, и 11-м, равным 42. Представляется разумным определить значение 2-го квантиля как среднее между двумя смежными значениями ( $Q_2 = 41,5$ ). Значение 3-го квантиля лежит между 15-м и 16-м значениями ряда ( $Q_3 = 45$ ).

Точно так же мы можно определить значения квинтилей (разбиение ранжированного ряда на 5 частей по 4 значения признака) или децилей (разбиение ряда на 10 равных частей по 2 значения переменной в каждой).

### 3. 4. Графическое представление результатов

Графическое представление результатов психологического исследования имеет ряд несомненных преимуществ перед табличным (цифровым) материалом в тех случаях, когда речь идет о докладах, научных отчетах и сообщениях, диссертационных работах и т. д. Графическое представление наиболее наглядно, оно позволяет визуальным образом представить полученные закономерности, связи и пр. В данном разделе мы коснемся лишь графического представления распределений исследуемого признака.

В основе графического представления лежат составленные заранее таблицы сгруппированных частот. Первый вид представления – построение столбчатых диаграмм (иначе, гистограмм) распределения признака (рис. 3.1, а). Гистограммы строятся в координатах  $f = \varphi(x_i)$ , где по оси абсцисс откладываются значения признака ( $x_i$ ), а по оси ординат – частота встречаемости признака ( $f$ ). Ширина каждого столбца гистограммы соответствует ширине класса, а высота столбца – частоте встречаемости признака в данном классе.

Вместо диаграмм можно использовать построение полигона распределения (рис. 3.1, б). В этом случае распределение отображается в виде точек, соединенных друг с другом прямыми линиями. Координаты каждой точки соответствуют среднему значению класса (по оси абсцисс) и частоте встречаемости признака в данном классе (по оси ординат).

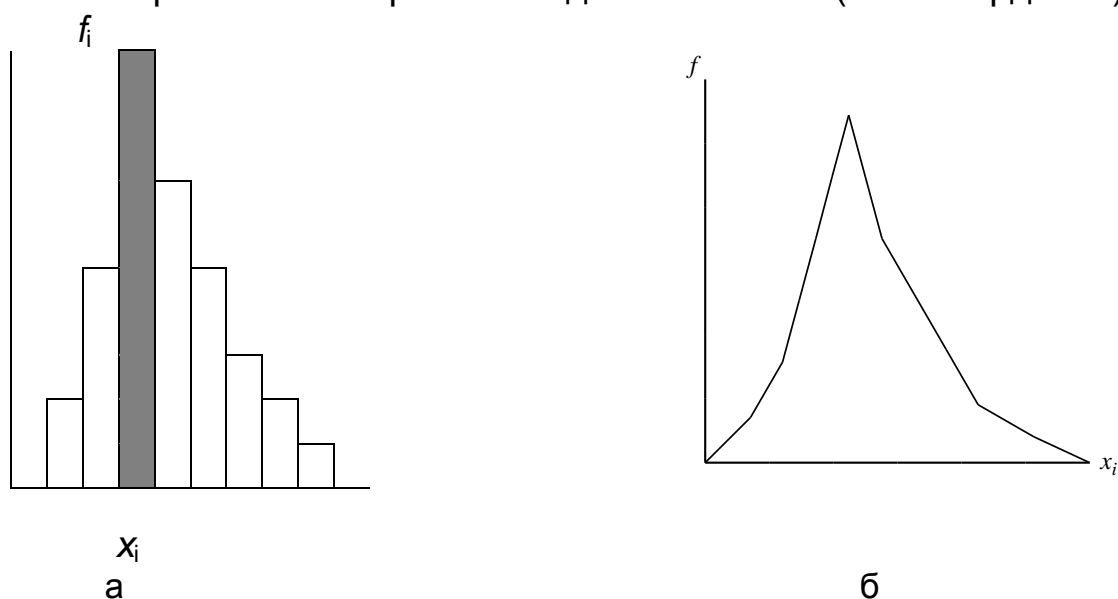


Рис. 3.1. Графическое представление результатов исследования:  
а – столбчатая диаграмма (гистограмма) распределения (зачерненный столбец соответствует модальному классу); б) полигон распределения.

По оси абсцисс – значение исследуемого признака ( $x_i$ ),  
по оси ординат – частота встречаемости данного значения признака ( $f$ )

## ГЛАВА 4

### МЕРЫ ЦЕНТРАЛЬНОЙ ТЕНДЕНЦИИ

Центральная тенденция – то количественное (численное) значение признака, к которому тяготеет переменная величина. Поскольку понятие «тяготеет» несколько произвольно и с математической точки зрения не вполне корректно, имеет смысл рассмотреть различные меры центральной тенденции более подробно.

В психологических исследованиях в качестве мер центральной тенденции чаще всего используются *мода*, *медиана* и *среднее арифметическое значение*. Значительно реже используются такие меры как *среднее геометрическое*, *среднее гармоническое*, *обратное среднее гармоническое значение* и др.

#### 4. 1. Мода

*Мода* ( $Mo$ ) – наиболее часто встречающееся значение признака. В предыдущем примере (ранжированный ряд уровня личностной тревожности) мы имеем две моды:  $Mo_1 = 36$  и  $Mo_2 = 45$  (эти значения переменной встречаются трижды, в то время как все остальные – по 1 или 2 раза). В зависимости от того, сколько значений признака удовлетворяют определению моды, различают *мономодальные* (имеющие одну моду), *бимодальные* (имеющие две моды) и *полимодальные* распределения (имеют более чем две моды), а также *распределения, не имеющие моды* (все значения признака встречаются примерно с одинаковой частотой). В бимодальном и полимодальном распределениях, в свою очередь, можно определить наибольшую и наименьшую моды.

В тех случаях, когда анализируются таблицы сгруппированных частот исследуемого признака, как правило, определяется *модальный класс*, т. е. тот класс распределения, в который попадает наибольшее количество частот (значений признака). Так, для иллюстрации зачерненный столбец на рис. 3.1, а соответствует модальному классу.

Мода не является достаточно строгой мерой центральной тенденции, поскольку она не учитывает характера распределения переменных, а значит может использоваться лишь в предварительных выводах и прогнозах. Кроме того, необходимо использовать моду только для больших объемов выборок, поскольку для малых она недостаточно информативна.

#### 4. 2. Медиана

*Медиана* ( $Md$ ) – значение, которое делит упорядоченное множество данных (ранжированный ряд) пополам так, что одна половина значений оказывается больше, а другая – меньше медианы. Медиана – среднее значение ранжированного ряда. Если число значений нечетное, то медиана соответствует среднему члену ряда, если четное, то медиана есть

среднее между двумя центральными значениями (в предыдущем примере  $Md = 41,5$ ).

Медиана соответствует 50-му процентилю, 5-му децилю или 2-му квартилю в группе данных, т. е.  $Md = P_{50} = D_5 = Q_2$ .

Мода и медиана не учитывают разброса данных, и переменные, лежащие в стороне от центра, не влияют на их величину.

### 4. 3. Среднее арифметическое значение

*Среднее арифметическое значение*, или просто *среднее* ( $\bar{x}$ ), равно сумме переменных, деленной на их число.

Для несгруппированных переменных среднее арифметическое вычисляется по формуле:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum x_i. \quad (4.1)$$

Для сгруппированных переменных можно воспользоваться другой формулой – среднее будет соответствовать сумме произведений средних значений каждого класса и частоты встречаемости значения признака в данном классе:

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 f_1 + \bar{x}_2 f_2 + \dots + \bar{x}_N f_N}{n} = \frac{1}{n} \sum \bar{x}_i f_i. \quad (4.2)$$

Среднее арифметическое может использоваться и для тех признаков, для которых не найден способ количественного измерения (шкала порядка). Для этого в качестве  $x_i$  используются ранговые числа, а среднее принято называть *непараметрическим средним*.

*Взвешенное среднее арифметическое* используется в тех случаях, когда разные составляющие имеют разный «удельный вес» в формировании общей совокупности:

$$\bar{x}_w = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_N p_N}{n} = \frac{\sum x_i p_i}{n}, \quad (4.3)$$

или: 
$$\bar{x}_w = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + \dots + x_N p_N}{p_1 + p_2 + \dots + p_N}, \quad (4.4)$$

где  $n$  – объем выборки,  $N$  – число классов.

#### Пример

Средний балл аттестата учащихся выпускных классов одной из школ соответствует следующим значениям: 11-а – 4,2; 11-б – 4,0 и 11-в – 3,8. Численность этих классов составляет: 11-а – 25 человек, 11-б – 28 и 11-в – 32 человека. В данном случае средний балл аттестата по всем выпускным классам составит  $(4,2 \cdot 25 + 4,0 \cdot 28 + 3,8 \cdot 32) : (25 + 28 + 32) = 3,98$ .

Среднее принято округлять с точностью до знака, следующего за последним знаком  $x_i$  (увеличение точности на порядок).

### Свойства среднего

1. Сумма всех отклонений от среднего значения равна нулю:  
 $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$ .

Доказательство:

$$\sum (x_i - \bar{x}) = \sum x_i - \sum \bar{x} = \sum x_i - n\bar{x} = \sum x_i - n \cdot \frac{\sum x_i}{n} = \sum x_i - \sum x_i = 0,$$

поскольку  $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$ .

2. Если константу  $c$  прибавить к каждому значению, то среднее  $x_i$  превратится в  $x_i + c$ .

Доказательство:

$$\frac{1}{n} \cdot \sum (x_i + c) = \frac{1}{n} \cdot \sum x_i + \frac{1}{n} \cdot \sum c = \bar{x} + \frac{1}{n} \cdot nc = \bar{x} + c.$$

3. Если каждое значение множества со средним  $\bar{x}$  умножить на константу  $c$ , то среднее станет равным  $c\bar{x}$ .

Доказательство:  $\frac{\sum cx_i}{n} = \frac{c \sum x_i}{n} = c\bar{x}.$

4. Сумма квадратов отклонений значений от их среднего арифметического меньше суммы квадратов отклонений от любой другой точки:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 < \sum (x_i - b)^2 \text{ (при условии, что } b \neq \bar{x}).$$

Доказательство:

$$(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2 < (x_1 - b)^2 + (x_2 - b)^2 + \dots + (x_n - b)^2, \text{ где } b \neq \bar{x}.$$

Примем  $b = \bar{x} + c$ . Тогда:

$$\sum [x_i - (\bar{x} + c)]^2 = \sum [(x_i - \bar{x}) - c]^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 - 2c \sum (x_i - \bar{x}) + nc^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 + nc^2,$$

поскольку  $\sum (x_i - \bar{x}) = 0$ .

Так как  $c^2 > 0$ , то:

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 < \sum [x_i - (\bar{x} + c)]^2.$$

### **4. 4. Среднее геометрическое значение**

Среднее геометрическое значение ( $x_g$ ) используется для вычисления центральной тенденции при прогрессивно возрастающих квантилях (когда распределение значений переменной имеет выраженную положительную (правостороннюю) асимметрию).

Формула среднего геометрического:

$$x_g = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = (x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n)^{\frac{1}{n}}. \quad (4.5)$$

Для вычислений можно использовать логарифмирование каждой переменной по основанию  $e$ :

$$\ln x_g = \frac{\ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n}{n} \quad (4.6)$$

Переход от  $\ln x_g$  к  $x_g$  осуществляется с помощью операции антилогарифмирования:

$$x_g = e^{\ln x} \quad (4.7)$$

### Задача 4.1

#### Условие задачи

У 50 школьников выпускных классов исследовался коэффициент интеллекта (IQ). Получен следующий вариационный ряд (см. табл.).

№№	/Q	№№	/Q	№№	/Q	№№	/Q	№№	/Q
1	119	11	104	21	111	31	103	41	107
2	86	12	88	22	98	32	88	42	92
3	100	13	113	23	84	33	108	43	105
4	93	14	89	24	102	34	70	44	89
5	108	15	103	25	92	35	113	45	95
6	117	16	107	26	88	36	83	46	110
7	82	17	78	27	104	37	91	47	101
8	100	18	110	28	127	38	97	48	85
9	86	19	98	29	103	39	87	49	114
10	129	20	84	30	112	40	101	50	102

#### Задание

1. Построить ранжированный ряд IQ.
2. Построить таблицу сгруппированных частот для 7 ÷ 8-классового распределения.
3. Построить графическое выражение IQ в виде полигона распределения или столбчатой диаграммы.
4. Определить 1-й, 2-й и 3-й квартили, моду, медиану и среднее арифметическое значение коэффициента интеллектуальности для выборки в 50 испытуемых.

### Задача 4.2

#### Условие задачи

В трех выпускных классах средней школы подсчитывался средний балл успеваемости. Получены следующие результаты:

	11-а класс		11-б класс		11-в класс	
Пол	Число учащихся	Балл	Число учащихся	Балл	Число учащихся	Балл
Девочки	18	3,62	15	3,90	17	3,75
Мальчики	12	3,44	13	3,58	13	3,70

### **Задание**

Вычислить средний балл успеваемости у девочек и мальчиков всех выпускных классов.

### **Задача 4. 3**

Имеется следующая совокупность экспериментальных данных: 1,00; 1,26; 1,58; 2,00; 2,51; 3,16; 3,98; 5,01; 6,31; 7,94.

### **Задание**

Вычислить среднее геометрическое значение данной совокупности двумя способами:

- а) вычислением произведения значений и возведения в соответствующую степень;
- б) путем логарифмирования по основанию  $e$ .

## ГЛАВА 5

### МЕРЫ ИЗМЕНЧИВОСТИ ИССЛЕДУЕМОГО ПРИЗНАКА

Две выборочные совокупности могут иметь одинаковые или близкие между собой средние значения признака и в то же время существенно различаться по степени вариабельности (вариативности) этого признака.

Например, имеется две группы испытуемых (по 100 человек в каждой), у которых исследуется коэффициент интеллекта (IQ). Средние значения IQ в той и другой группе могут приблизительно совпадать (допустим,  $IQ_1 = 102$  и  $IQ_2 = 97$ ), и констатация этого факта даст нам очень немного информации. В то же время известно, что индивидуальные значения в первой группе испытуемых изменяются от 85 до 116, а во второй от 60 до 135. На основании этого можно констатировать, что вторая выборка обладает большим разнообразием признака по сравнению с первой.

Для определения степени разнообразия (изменчивости) исследуемого параметра используются различные критерии: пределы разнообразия, размах вариаций, среднее и стандартное отклонения, дисперсия, коэффициент вариации и др.

#### 5. 1. Лимиты (пределы) разнообразия

**Лимит (предел) разнообразия** – это указание наименьшей и наибольшей величины признака среди всех представителей группы:

$$\lim x = x_{\min} \div x_{\max} \quad (5.1)$$

Другими словами, предел разнообразия признака не вычисляется, а лишь констатируется. Так, в приведенном выше примере  $\lim x_1 = 85 \div 116$  и  $\lim x_2 = 60 \div 135$ .

#### 5. 2. Размах вариаций

**Размах вариаций** ( $\rho$ ) есть математическая разность между максимальной и минимальной величиной признака:

$$\rho = x_{\max} - x_{\min} \quad (5.2)$$

В нашем примере размах вариаций в первой группе ( $\rho_1$ ) составляет  $116 - 85 = 31$  и во второй ( $\rho_2$ ) –  $135 - 60 = 75$ .

**Размах от 10-го до 90-го перцентиля (мера D)** вычисляется следующим образом:

$$D = P_{90} - P_{10} = D_9 - D_1 \quad (5.3)$$

Другими словами, для вычисления меры  $D$  отсекается по 10% значений с левого и правого края распределения и определяется размах вариаций для оставшихся 80%. Эта мера более стабильна, чем включающий и исключающий размах, поскольку на него не влияют крайние (возможно, случайные) значения вариаций.

**Междуквартильный размах** – еще более жесткая мера изменчивости, нежели мера  $D$ . Междуквартильный размах – это разность между 1-м и 3-м квартилями группы:

$$Q = Q_3 - Q_1 \quad (5.4)$$

Другими словами, для определения междуквартильного размаха с краев распределения признака отсекается по 25% значений и определяются границы для оставшихся (наиболее типичных) 50%, которые в максимальной степени характеризуют центральную тенденцию.

**Полумеждуквартильный размах** ( $Q_{1/2}$ ) равен половине расстояния между 1-м и 3-м квартилями:

$$Q_{1/2} = \frac{Q}{2} = \frac{Q_3 - Q_1}{2} \quad (5.5)$$

Суть этой статистической меры состоит в уравнивании между собой расстояний между 1-м и 2-м и между 2-м и 3-м квартилями, которые в случае несимметричных распределений могут отличаться друг от друга. В случае же симметричного распределения полумеждуквартильный размах включает в себя приблизительно 25% данных.

### 5. 3. Среднее отклонение

**Среднее отклонение (MD)** – параметрическая мера изменчивости, предложенная в свое время Г. Т. Фехнером. Среднее отклонение равно сумме отклонений от среднего значения (или, другими словами, сумме расстояний между  $x_i$  и  $\bar{x}$ ), взятых по модулю:

$$MD = \frac{|x_1 - \bar{x}| + |x_2 - \bar{x}| + \dots + |x_n - \bar{x}|}{n} = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n} \quad (5.6)$$

### 5. 4. Дисперсия

**Дисперсия** ( $\sigma^2$ ) представляет собой сумму квадратов отклонений от среднего (сумму квадратов расстояний между  $x_i$  и  $\bar{x}$ ):

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (5.7)$$

Деление суммы квадратов на число степеней свободы  $n - 1$  позволяет сравнивать между собой совокупности, различные по объему. Считается, что дисперсия – более мощный статистический критерий, нежели среднее отклонение, так как больший вклад в дисперсию дают те значения признака, которые расположены дальше от среднего (вклад каждого значения в дисперсию возрастает пропорционально квадрату отклонения от среднего).

Формула 5.7 не очень удобна при расчете дисперсии вручную (на микрокалькуляторе). Поэтому для этих целей можно использовать другую (рабочую) формулу, которую можно получить путем соответствующих преобразований.

Преобразование формулы:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1} = \frac{\sum (x_i^2 - 2\bar{x}x_i + \bar{x}^2)}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - 2\bar{x}\sum x_i + \sum \bar{x}^2}{n-1}.$$

Но  $\sum \bar{x} = n\bar{x}$  и  $\sum x_i = n\bar{x}$ . Отсюда следует, что:

$$\frac{\sum x_i^2 - 2n\bar{x}^2 + n\bar{x}^2}{n-1} = \frac{\sum x_i^2 - n\bar{x}^2}{n-1}.$$

Так как  $\bar{x}^2 = \frac{(\sum x_i)^2}{n^2}$ , то:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / n}{n-1} = \frac{n\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{n(n-1)}. \quad (5.8)$$

Свойства дисперсии:

1. Дисперсия не изменится, если к каждому значению  $x_i$  прибавить константу  $c$ :  $x_j = x_i + c \Rightarrow \sigma_j^2 = \sigma_i^2$ .
2. Умножение на константу  $c$  каждого значения  $x_i$  увеличивает дисперсию в  $c^2$  раз:  $x_j = cx_i \Rightarrow \sigma_j^2 = c^2 \cdot \sigma_i^2$ .

## 5. 5. Среднеквадратичное (стандартное) отклонение

**Стандартное отклонение** ( $\sigma_x$ ) соответствует квадратному корню из дисперсии. Наряду с дисперсией является одной из наиболее часто используемых мер вариабельности признака.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 / n}{n-1}}. \quad (5.9)$$

## 5. 6. Коэффициент вариации

**Коэффициент вариации** ( $V$ ) есть отношение стандартного отклонения к среднему арифметическому значению, выраженное в процентах:

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (5.10)$$

### Задача 5. 1

В психофизиологическом эксперименте регистрировалось время простой сенсомоторной реакции у 50 испытуемых в ответ на звуковой стимул средней интенсивности. Получены следующие значения времени реакции (ВР) в миллисекундах:

№	$T$ , мс	№	$T$ , мс	№	$T$ , мс	№	$T$ , мс	№	$T$ , мс
1	138	11	137	21	136	31	142	41	149
2	180	12	172	22	132	32	164	42	158
3	160	13	143	23	135	33	147	43	145
4	144	14	126	24	142	34	144	44	155
5	169	15	139	25	129	35	131	45	161
6	140	16	130	26	139	36	150	46	148
7	178	17	127	27	156	37	128	47	166
8	134	18	144	28	130	38	143	48	146
9	141	19	125	29	141	39	133	49	128
10	174	20	132	30	175	40	151	50	153

### **Задание**

1. Определить размах вариаций, междуквартильный и полумеждуквартильный размах, среднее отклонение, дисперсию, стандартное отклонение и коэффициент вариации.

2. Построить обычную и кумулятивную кривые распределения ВР. Определить процентное соотношение частот при нормировании распределения по стандартному отклонению от  $-4\sigma$  до  $+4\sigma$  с шагом в  $1\sigma$ .

3. Определить размах распределения признака в единицах стандартного отклонения.

## **Задача 5.2**

### **Условие задачи**

Проведено тестирование двух групп испытуемых (по 10 человек в каждой) на уровень личностной тревожности (УЛТ) по Спилбергеру. Получены следующие результаты:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
УЛТ <sub>1</sub>	24	42	29	39	26	37	40	33	44	38
УЛТ <sub>2</sub>	34	40	26	47	29	31	38	43	45	42

### **Задание**

Определить средние значения УЛТ, стандартные отклонения и коэффициенты вариаций для каждой группы испытуемых, сравнить их между собой, сделать выводы.

## ГЛАВА 6

### РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ ВЕЛИЧИН

Кроме эмпирических (построенных на основе данных экспериментального исследования) существуют и теоретические распределения. Любое теоретическое распределение представляет собой определенную математическую модель, которой (с определенной долей вероятности) могут соответствовать (или не соответствовать) экспериментальные распределения.

Перед психологом достаточно часто возникает проблема сопоставления экспериментального распределения с теоретическим – в плане выбора наиболее адекватного метода математической обработки результатов для прогнозирования вероятности тех или иных событий и т.д. В предлагаемой главе будут рассмотрены лишь те виды распределений, с которыми психологам приходится встречаться особенно часто. Особое внимание будет уделено *нормальному распределению*. Кроме него, будут рассмотрены *равномерное, биномиальное распределение и распределение Пуассона*.

#### 6.1. Нормальное распределение

##### 6. 1. 1. Основные понятия

*Нормальное распределение (распределение Гаусса, распределение Муавра – Лапласа)* – это распределение значений переменной величины в тех случаях, когда она варьирует случайным образом и не подвержена влиянию какого-либо систематического фактора.

*Формула нормального распределения:*

$$f = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma} \cdot e^{-\frac{(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}}, \varphi(x) = ae^{-b(x_i - \bar{x})^2}, \quad (6.1 \text{ а, б})$$

где:  $f$  – теоретическая частота встречаемости значения  $x_i$ ;  $\sigma$  – стандартное отклонение;  $a, b$  – константы;  $\pi \approx 3,142$  (отношение длины окружности к диаметру);  $e \approx 2,718$  (основание натурального логарифма).

Теоретическое нормальное распределение имеет вид симметричной колоколообразной кривой, которая подчиняется следующим закономерностям:

1. Правая и левая ветви теоретического нормального распределения абсолютно симметричны и как бы зеркально отражают друг друга.

2. В нормальном распределении основные показатели центральной тенденции (мода, медиана и среднее арифметическое значение) совпадают и соответствуют самой высокой точке (вершине) распределения.

3. Правая и левая ветви распределения уходят в бесконечность, никогда не соприкасаясь с осью абсцисс. Другими словами, частота (вероятность) встречаемости того или иного значения признака может

быть сколь угодно мала, но никогда не равна нулю. В практическом отношении это свойство нормального распределения весьма неудобно, так как погоня за бесконечностью – занятие весьма неблагоприятное. Поэтому принято анализировать полученные данные в диапазоне от  $-4$  до  $+4$  стандартных отклонений (теоретически в этот диапазон должно попадать  $\sim 99,98\%$  экспериментальной выборки). В то же время сужение диапазона до  $\pm 3 \sigma$  несколько рискованно, так как значения, даваемые «крайними» испытуемыми, могут выпасть из рассмотрения.

При переводе экспериментальных значений в единицы стандартного отклонения может быть использована мера Пирсона  $z = (x_i - \bar{x})/\sigma_x$ . На рис. 6.1 показаны теоретические частоты встречаемости значений признака (в процентном соотношении) при разбиении диапазона от  $-4 \sigma$  до  $+4 \sigma$  на восемь равных классов (ширина каждого класса соответствует одному стандартному отклонению), а также соответствующие 8-классовому распределению кумулятивные (накопленные) частоты (рис. 6.2). Эти численные значения могут понадобиться для сравнения экспериментально полученного распределения с теоретическим.

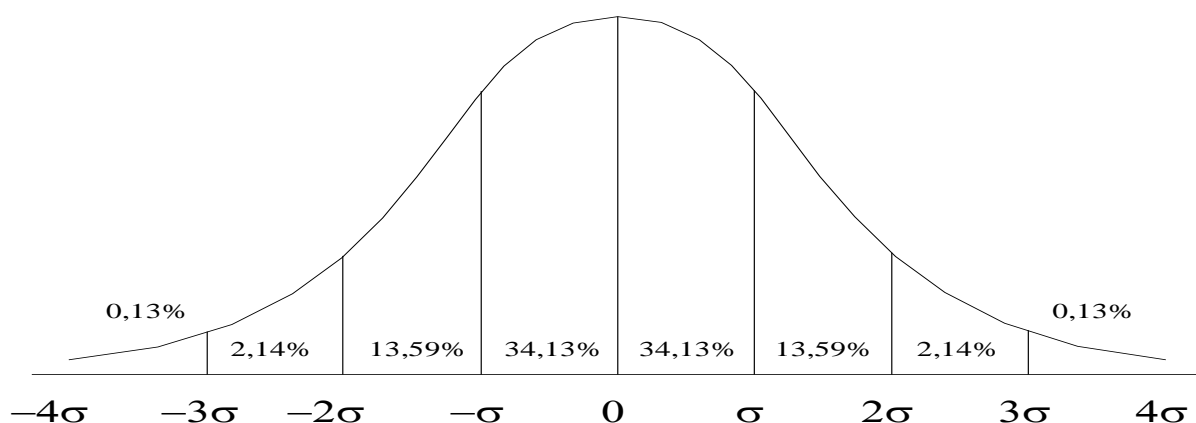
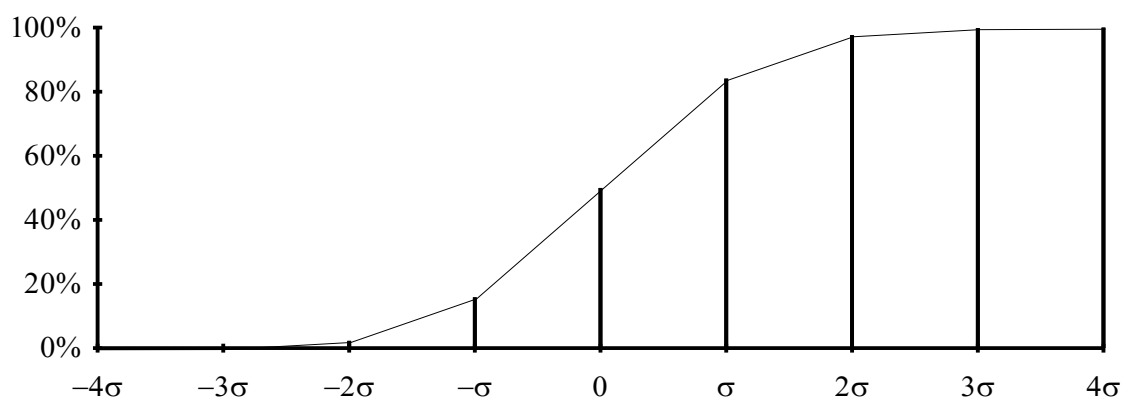


Рис. 6.1. Кривая нормального распределения



$\approx 0,1\% \approx 2,3\% \approx 15,9\% \approx 50\% \approx 84,1\% \approx 97,7\% \approx 99,9\% \approx 100\%$

Рис. 6.2. Кумулятивная кривая нормального распределения

Кроме 8-классового, иногда используют 16-классовое распределение – в этом случае диапазон от  $-4$  до  $+4$   $\sigma$  разбивают на 16 равных классов с шагом  $0,5$  стандартных отклонения.

Зная распределение частот в нормальном распределении, можно решить обратную задачу – определить размах (в единицах стандартного отклонения), в который укладывается определенное количество (процент) значений выборочной совокупности. Так, 90% выборки укладываются в пределах  $\pm 1,645\sigma$ ; 95% соответствуют  $\pm 1,96\sigma$ ; 99% соответствуют  $\pm 2,58\sigma$ ; 99,9% укладываются в  $\pm 3,29\sigma$ . Как будет показано далее, эти соотношения имеют большое значение для определения достоверности некоторых статистических выводов при разных уровнях значимости.

*Двумерное нормальное распределение* можно получить, измеряя две относительно независимые друг от друга переменные. Оно строится в трехмерном пространстве, в координатах  $f(x, y)$  и имеет колоколообразный вид.

Как отмечалось ранее, распределения переменных величин, получаемые в эксперименте, имеют определенную степень приближения к теоретическому (нормальному) распределению. В данном случае степень соответствия эмпирического распределения нормальному позволяет определить, насколько случайно или закономерно варьирует тот или иной показатель, подвержен ли он влиянию каких-либо систематических факторов и т. д.

Существует ряд статистических критериев, позволяющих сравнить экспериментально полученное распределение с теоретическим (нормальным). Основными из них являются коэффициент асимметрии, показатель эксцесса, критерий хи-квадрат Пирсона ( $\chi^2$ ) и критерий  $\lambda$  Колмогорова - Смирнова.

### 6. 1. 2. Коэффициент асимметрии

Распределение может быть приблизительно симметричным относительно моды либо обладать отрицательной или положительной асимметрией. Положительно асимметричным считается распределение с более крутым левым и более пологим правым крылом, распределение с отрицательной асимметрией, напротив, имеет более пологий левый фронт нарастания и более крутой правый (см. рис. 6.3.).



Рис. 6.3. Типы асимметрии

Рассчитываемый по соответствующим формулам коэффициент асимметрии ( $As$ ) может быть использован в качестве одного из критериев соответствия экспериментального распределения теоретическому.

*Вычисление коэффициента асимметрии:*

Коэффициент асимметрии вычисляется по следующей формуле:

$$As = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^3}{n\sigma^3} = \frac{\sum z_x^3}{n}, \quad (6.2)$$

где  $z_x$  – мера Пирсона  $\left( z_x = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma} \right)$ .

При больших выборках ( $n > 50$ ) можно использовать упрощенную формулу:

$$As = \frac{3(\bar{x} - Md)}{\sigma} \quad (6.3)$$

Соответствие эмпирического распределения нормальному находится по соответствующим таблицам (в нашем приложении – табл. I). При этом эмпирическое распределение считается соответствующим теоретическому (нормальному), если асимметрия при данной выборке не превышает граничного значения.

Пример

Распределение значений исследуемого признака для выборки в 100 человек обнаружило коэффициент асимметрии  $As = 0,55$ .

Вопрос: соответствует ли данное распределение нормальному?

Решение: в табл. I находим, что для  $n = 100$   $As_{кр.} = 0,39$  (для  $\beta_1 = 0,95$ ) и  $As_{кр.} = 0,57$  (для  $\beta_1 = 0,99$ ).

Ответ: распределение статистически достоверно отличается от нормального с вероятностью 0,95, поскольку  $As_{экс.} > As_{кр.}$ . С вероятностью же 0,99 аналогичного вывода мы сделать не можем ( $As_{экс.} < As_{кр.}$ ).

Причины асимметрии могут быть различными. Во-первых, это возможное действие побочных односторонних факторов. Так, например, в тестах на измерение интеллекта могут преобладать сложные задания, с которыми большинство испытуемых не справляется. Это может явиться причиной положительной асимметрии (центральная тенденция лежит слева от среднего значения). Во-вторых, это ограничение (сверху или снизу) размаха вариаций.

Например, при измерении времени сенсомоторной реакции нижний предел реагирования лимитирован физиологическими возможностями субъекта, в то время как верхний жестко не ограничен. Наконец, третьей причиной асимметрии может быть неоднородность выборки (например, если исследование проводится в смешанной группе разного возраста). При этом имеет место наложение друг на друга двух или нескольких разных по численности и сдвинутых относительно друг друга по моде распределений.

### 6. 1. 3. Коэффициент эксцесса

В отличие от коэффициента асимметрии, коэффициент (показатель) эксцесса характеризует компактность или «размытость» распределения, его островершинность или плосковершинность, что связано с разным характером группирования значений переменной вокруг среднего (рис. 6.4).

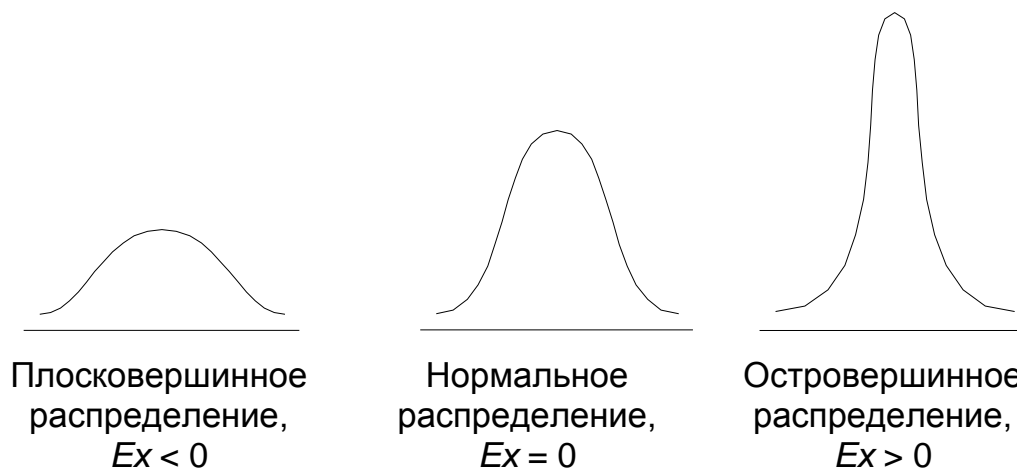


Рис. 6.4. Типы эксцесса

Причинами эксцесса могут быть большая или меньшая степень тяготения переменных к центральной тенденции, неоднородность выборки, наложение друг на друга нескольких распределений с одинаковой модой и разной дисперсией и т. д.

*Вычисление показателя эксцесса*

$$Ex = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^4}{n\sigma^4} - 3 = \frac{\sum z_x^4}{n} - 3. \quad (6.4)$$

Теоретически величина эксцесса может варьировать от  $-3$  до  $+\infty$ . Критерий согласия с нормальным распределением аналогично коэффициенту асимметрии определяется по таблицам граничных значений. Например, для  $n = 100$  и  $\beta_1 = 0,95$   $Ex_{кр} = 0,83$  (см. Приложение, табл. II).

Аналогично определению асимметрии распределение соответствует нормальному (согласуется с нормальным), если  $Ex < Ex_{кр}$ . При обратном соотношении принято говорить, что по показателю эксцесса эмпирическое распределение статистически достоверно отличается от нормального.

При анализе эмпирического распределения может возникнуть такая ситуация, когда по одному из показателей (асимметрии или эксцессу) распределение соответствует нормальному, по другому же – отличается от него. В этом случае следует использовать следующее правило: если хотя бы по одному из вышеуказанных показателей распределение достоверно отличается от нормального, то следует делать вывод о том, что экспериментальное распределение отличается от теоретического (нормального).

Кроме коэффициента асимметрии и показателя эксцесса, для сравнения экспериментального распределения с теоретическим используют и другие критерии, в частности критерий хи-квадрат и критерий  $\lambda$  Колмогорова - Смирнова.

#### 6. 1. 4. Критерий хи-квадрат ( $\chi^2$ )

Критерий хи-квадрат основан на сравнении между собой эмпирических (экспериментальных) частот исследуемого признака и теоретических частот нормального распределения. Для сравнения частот можно пользоваться как 8-классовым, так и 16-классовым распределениями, теоретические частоты которых в интервале от  $-4$  до  $+4$  стандартных отклонений даны в приложении (табл. III и IV). В случае необходимости можно вычислять хи-квадрат и по большему числу классов – для этого используют специальные таблицы нормального распределения.

Критерий  $\chi^2$  рассчитывают по следующей формуле:

$$\chi^2 = \sum [(f_{\text{э}} - f_{\text{т}})^2 / f_{\text{т}}], \quad (6.5)$$

Где  $f_{\text{э}}$  и  $f_{\text{т}}$  – соответственно, экспериментальные и теоретические частоты в каждом отдельном классе разбиения. Полученное значение сравнивается со стандартным (табличным). Решение о соответствии экспериментального распределения теоретическому принимается, если  $\chi^2 < \chi^2_{\text{кр.}}$  при соответствующем числе степеней свободы и заданном уровне значимости. При этом необходимо иметь в виду, что в случае *нормального распределения* число степеней свободы ( $\nu$ ) принимается равным  $N - 3$ , где  $N$  – число классов (групп разбиения).

Рассмотрим алгоритм вычислений критерия  $\chi^2$  на следующем примере.

##### Условие задачи

У 100 испытуемых определялся уровень нейротизма по тесту Айзенка. Получены следующие результаты (табл. 6.1):

Таблица 6.1

Нейро- тизм	Число испытуе- мых	Нейро- тизм	Число испытуе- мых	Нейро- тизм	Число испытуе- мых	Нейро- тизм	Число испытуе- мых
$x_i$	$f_{\text{э}}$	$x_i$	$f_{\text{э}}$	$x_i$	$f_{\text{э}}$	$x_i$	$f_{\text{э}}$
1	0	7	3	13	10	19	4
2	0	8	4	14	8	20	3
3	0	9	6	15	9	21	1
4	0	10	8	16	9	22	0
5	2	11	9	17	8	23	0
6	3	12	7	18	6	24	0

### Задание

Определить соответствие экспериментального распределения теоретическому (нормальному) распределению с помощью критерия  $\chi^2$  Пирсона.

### Решение

Задача решается в три этапа:

1. Определяем среднее значение переменной и ее стандартное отклонение. Поскольку в данном случае мы имеем дело со сгруппированными частотами, то для вычисления среднего арифметического следует использовать следующую формулу (см. раздел 4):

$$\bar{x} = \frac{\bar{x}_1 f_1 + \bar{x}_2 f_2 + \dots + \bar{x}_N f_N}{n} = \frac{1}{n} \sum \bar{x}_i f_i.$$

Подставляем в формулу значения нейротизма и соответствующие ему частоты из условия задачи:

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 2 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + \dots + 21 \cdot 1}{100} = 13,2.$$

Стандартное отклонение следует определять по следующей формуле:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}.$$

В нашем случае:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{(5 - 13,2)^2 \cdot 2 + (6 - 13,2)^2 \cdot 3 + \dots + (21 - 13,2)^2}{99}} = 3,8.$$

2. Нормируем полученные результаты в единицах стандартного отклонения с «шагом» в  $1\sigma$  (8-классовое распределение). Для этого строим шкалу значений в единицах стандартного отклонения от  $-4\sigma$  до  $+4\sigma$ . Далее определяем границы каждого из 8 классов в абсолютных значениях исследуемого показателя (уровней нейротизма). Напомним, что точкой отсчета в данном случае является центральное значение ( $\sigma_x = 0$ ), которому теоретически должны соответствовать основные меры центральной тенденции – мода, медиана и среднее арифметическое значение. Обозначим среднюю точку значением 13,2 (среднее арифметическое). После этого определяем границы классов в абсолютных единицах (значениях нейротизма), последовательно вычитая из среднего (слева от нулевой точки) или добавляя к среднему (справа от нее) величину стандартного отклонения ( $\sigma_x = 3,8$ ). Наконец, подсчитываем частоты (число испытуемых) в каждом из классов и разносим полученные значения по классам теоретического распределения. Для большей наглядности можно представить результаты в виде следующей схемы:

- 4 $\sigma$ - 3 $\sigma$ - 2 $\sigma$ - $\sigma$ 0 $\sigma$ 2 $\sigma$ 3 $\sigma$ 4 $\sigma$							
0	2	16	34	30	17	1	0
-2,0	1,8	5,6	9,4	13,2	17,0	20,8	24,6
28,4							

3. Составляем таблицу для вычисления критерия  $\chi^2$  Пирсона (см. табл. 6.2). В столбце 1 обозначаем классы распределения (в единицах стандартного отклонения, в столбце 2 – подсчитанные нами экспериментальные частоты в каждом классе, в столбце 3 – теоретические частоты в процентном соотношении (см. табл. III Приложения). Столбец 4 служит для попарного сопоставления экспериментальных и теоретических частот: для этого следует

использовать формулу  $\frac{(f_{\text{э}} - f_{\text{т}})^2}{f_{\text{т}}}$

Таблица 6.2

Границы класса	Частоты		$\frac{(f_{\text{э}} - f_{\text{т}})^2}{f_{\text{т}}}$
	$f_{\text{э}}$	$f_{\text{т}}$	
1	2	3	4
$-4\sigma \div -3\sigma$	0	0,13	0,13
$-3\sigma \div -2\sigma$	2	2,15	0,01
$-2\sigma \div -\sigma$	16	13,59	0,43
$-\sigma \div 0$	34	34,13	0
$0 \div \sigma$	30	34,13	0,50
$\sigma \div 2\sigma$	17	13,59	0,86
$2\sigma \div 3\sigma$	1	2,15	0,62
$3\sigma \div 4\sigma$	0	0,13	0,13

Критерий  $\chi^2$  вычисляется как сумма значений в столбце 4 таблицы. Проводим соответствующие вычисления:

$$\chi^2 = \sum \left[ \frac{(f_{\text{э}} - f_{\text{т}})^2}{f_{\text{т}}} \right] = 2,68.$$

В табл. VI Приложения находим стандартные (критические) значения  $\chi^2$ . Напомним, что для 8-классового распределения ( $N = 8$ ) число степеней свободы  $\nu = N - 3 = 5$ . При этом стандартные значения  $\chi^2_{\text{ст.}}$  для двух уровней значимости составляют, соответственно, 11,070 ( $\beta_1 = 0,95$ ) и 15,086 ( $\beta_2 = 0,99$ ).

#### Вывод

Для двух стандартных уровней значимости  $\chi^2 < \chi^2_{\text{ст.}}$ , следовательно, по критерию  $\chi^2$  Пирсона экспериментальное распределение статистически не отличается от теоретического (нормального) распределения или, другими словами, соответствует последнему. Данный вывод можно считать справедливым для уровня значимости 0,99.

#### 6. 1. 5. Критерий Колмогорова – Смирнова ( $\lambda$ )

Критерий Колмогорова – Смирнова основан на том же принципе, что и критерий  $\chi^2$  Пирсона, но предполагает сопоставление *накопленных* частот экспериментального и теоретического распределений. Вычисляется как отношение максимальной разности (без учета знака) между

теоретической и экспериментальной накопленной частотой к корню квадратному из численности выборки: (6.6)

Для вычисления  $\lambda$  также можно воспользоваться таблицами теоретических частот 8- и

16-классового распределения. Рассмотрим алгоритм вычислений критерия Колмогорова на примере предыдущей задачи (табл. 6.3).

Таблица 6.3

Границы класса	Экспериментальные частоты	Накопленные частоты		$d$
		$F_э$	$F_т$	
1	2	3	4	5
$-4\sigma \div -3\sigma$	0	0	0,13	0,13
$-3\sigma \div -2\sigma$	2	2	2,28	0,28
$-2\sigma \div -\sigma$	16	18	15,87	2,13
$-\sigma \div 0$	34	52	50,00	2,00
$0 \div \sigma$	30	82	84,13	<b>2,13</b>
$\sigma \div 2\sigma$	17	99	97,72	1,28
$2\sigma \div 3\sigma$	1	100	99,87	0,13
$3\sigma \div 4\sigma$	0	100	100	0

Столбцы 1 и 2 аналогичны таковым в предыдущей таблице. Столбец 3 соответствует экспериментальным частотам, накопленным путем суммирования частот от 1-го до 8-го класса. Теоретические накопленные частоты взяты из табл. III Приложения. Максимальная разность между экспериментальной и теоретической накопленными частотами (столбец 5) соответствует 2,13. Проводим соответствующие вычисления:

$$\lambda = \frac{d_{\max}}{\sqrt{n}} = \frac{2,13}{\sqrt{100}} = 0,21.$$

Для определения соответствия экспериментального распределения теоретическому по критерию Колмогорова можно воспользоваться следующим правилом. Если  $\lambda < 0,52$ , делается вывод о соответствии распределений для уровня значимости 0,95. При  $\lambda > 1,36$  распределение достоверно отличается от нормального. При значениях же  $\lambda$  от 0,52 до 1,36 (интервал неопределенности) можно определить вероятность соответствия экспериментального распределения теоретическому по табл. VII Приложения.

### **Вывод**

Полученное значение  $\lambda = 0,21 < 0,52$ , следовательно, по критерию Колмогорова экспериментальное распределение соответствует нормальному с вероятностью 0,95.

Для определения соответствия эмпирического распределения теоретическому (нормальному) распределению можно воспользоваться и другим способом, который зачастую дает более точные результаты,

поскольку не ограничен числом классов. Этот способ будет рассмотрен на примере той же задачи.

Порядок вычислений приводится в табл. 6.4.

1. В столбце 1 таблицы фиксируем значения  $x_i$  (уровень нейротизма).

2. Переводим значения  $x_i$  в меру  $z$  Пирсона по формуле:  $z = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$ .

3. Ориентируясь на условие задачи, вносим экспериментальные частоты в столбец 3.

4. По значениям столбца 3 вычисляем накопленные экспериментальные частоты и фиксируем их в столбце 4.

5. По значениям  $z$  Пирсона определяем теоретические накопленные частоты, для чего используем табл. V Приложений.

6. Вычисляем критерий  $d$ , сравнивая между собой экспериментальные (столбец 4) и теоретические частоты по формуле:  $d = |F_{\text{эксп.}} - F_{\text{теор.}}|$ .

7. Вычисляем критерий  $\lambda$  Колмогорова по стандартной формуле.

**Ответ**

$\lambda = 7,57:10 = 0,76$  (столбец 6 таблицы), что соответствует интервалу неопределенности  $0,52 \div 1,36$ .

С целью устранения случайных факторов используем процедуру интервальной нормализации  $\left(F_9^* = F_9 - \frac{f_9}{2}\right)$  (столбец 7) и повторно вычисляем критерий  $\lambda$ :

$\lambda^* = 4,64 : 10 = 0,46$  (столбец 8 таблицы).

**Общий ответ**

Эмпирическое распределение соответствует теоретическому (нормальному) распределению.

Таблица 6.4

$x_i$	$Z$	$f_9$	$F_9$	$F_T$	$d$	$F_9^*$	$d^*$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	-3,2	0	0	0,07	0,07	0	0,07
2	-2,9	0	0	0,18	0,18	0	0,18
3	-2,7	0	0	0,34	0,34	0	0,34
4	-2,4	0	0	0,82	0,82	0	0,82
5	-2,2	2	2	1,40	0,60	1	0,40
6	-1,9	3	5	2,88	2,12	3,5	0,62
7	-1,6	3	8	5,49	2,51	6,5	1,01
8	-1,4	4	12	8,08	3,92	10	1,92
9	-1,1	6	18	13,57	4,43	15	1,43
10	-0,8	8	26	21,19	4,81	22	0,81
11	-0,6	9	35	27,43	<b>7,57</b>	30,5	3,07
12	-0,3	7	42	38,21	3,79	38,5	0,29
13	0	10	52	50,00	2,00	47	3,00

14	0,2	8	60	57,92	2,08	56	1,92
15	0,5	9	69	69,14	0,14	64,5	<b>4,64</b>
16	0,7	9	78	75,80	2,20	73,5	2,30
17	1,0	8	86	84,13	1,87	82	2,13
18	1,3	6	92	90,31	1,69	89	1,31
19	1,5	4	96	93,31	2,69	94	0,69
20	1,8	3	99	96,40	2,60	97,5	1,10
21	2,1	1	100	98,21	1,79	99,5	1,29
22	2,3	0	100	98,92	1,08	100	1,08
23	2,5	0	100	99,37	0,63	100	1,63
24	2,8	0	100	99,75	0,25	100	0,25

## 6. 2. Равномерное распределение

В ряде случаев психологу приходится иметь дело с *равномерным распределением*, когда варьирующая величина (переменная) приблизительно с равной вероятностью принимает любое значение в определенном фиксированном диапазоне от  $x_{\min}$  до  $x_{\max}$ . Пример такого распределения приводится на рис. 6.5.

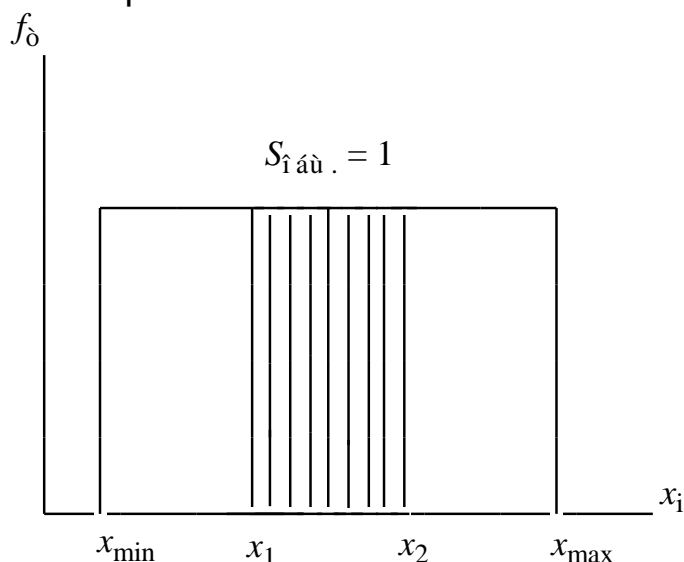


Рис. 6.5. Графическое выражение теоретического равномерного распределения (пояснения в тексте)

Примером равномерного распределения может служить распределение испытуемых по квантилям, поскольку в каждом интервале квантильной шкалы частоты встречаемости признака одинаковы.

Работа с равномерным распределением достаточно проста. Учитывая, что общая площадь распределения соответствует  $P = 1$ , вероятность события в интересующем нас диапазоне  $x_1 \div x_2$  равна отношению ширины этого диапазона (размаха вариаций)  $x_2 - x_1$  к общему ( $x_{\max} \div x_{\min}$ ). Для сравнения экспериментального распределения с теоретическим можно использовать критерий хи-квадрат, а при достаточном количестве эмпирических частот и критерий Колмогорова. Рассмотрим использование этих критериев на двух примерах.

### Пример 1

Можно априорно предположить, что число людей, обладающих одним из четырех основных типов темперамента (холерики, сангвиники, флегматики и меланхолики) приблизительно одинаково. Для проверки этой гипотезы проведено тестирование по тесту-опроснику Айзенка 100 взрослых испытуемых. Тип темперамента определялся у них по соотношению показателей экстраверсии и нейротизма.

Было получено следующее распределение испытуемых по типам темперамента: холерики – 22 человека, сангвиники – 36, флегматики – 13 и меланхолики – 29 человек.

Задача состоит в том, чтобы либо принять, либо отвергнуть изначальную гипотезу (нуль-гипотезу) о равномерности распределения людей по типам темперамента.

Для решения задачи можно составить таблицу, аналогичную той, которая использовалась для оценки согласия эмпирического распределения с нормальным по критерию хи-квадрат (см. табл. 6.5).

Таблица 6.5

Тип темперамента	Частота		$\frac{(f_{\text{эксп}} - f_{\text{теор}})^2}{f_{\text{теор}}}$
	$f_{\text{эксп}}$	$f_{\text{теор}}$	
<b>Холерики</b> (экстраверты с высоким уровнем нейротизма)	22	25	0,36
<b>Сангвиники</b> (эмоционально стабильные экстраверты)	36	25	4,84
<b>Флегматики</b> (эмоционально стабильные интроверты)	13	25	5,76
<b>Меланхолики</b> (интроверты с высоким уровнем нейротизма)	29	25	0,64

В данном случае следует пояснить, что теоретические частоты рассчитываются, исходя из гипотезы о том, что распределение по типам темперамента является идеально равномерным.

Вычисление показателя  $\chi^2$  (сумма значений в последнем столбце таблицы) дает величину 11,6. При сравнении полученного значения со стандартным (табл. VI Приложений) следует иметь в виду, что для равномерного распределения число степеней свободы вычисляется как число групп (классов) разбиения минус единица: в нашем случае  $\nu = N - 1 = 3$ .

Полученное нами значение ( $\chi^2 = 11,6$ ) больше стандартных (критических) значений как для 1-го ( $\chi^2_{\text{ст}} = 7,815$ ), так и для 2-го уровня значимости ( $\chi^2_{\text{ст}} = 11,345$ ). Отсюда следует, что принять гипотезу о равномерности распределения людей по типам темперамента мы не можем. Другими словами, распределение статистически достоверно отличается от равномерного.

## **Пример 2**

### **Условие задачи**

В выборке здоровых лиц мужского пола, студентов технических вузов в возрасте от 19 до 22 лет проводился тест М. Люшера в 8-цветном варианте. Установлено, что желтый цвет предпочитается испытуемыми чаще, чем отвергается (см. табл. 6.6).

Таблица 6.6

Разряды	Позиции желтого цвета								Сумма
	1	2	3	4	5	6	7	8	
Эмпирические частоты	24	15	13	8	15	10	9	8	102

### **Вопрос**

Можно ли утверждать, что распределение желтого цвета по восьми позициям у здоровых испытуемых отличается от равномерного распределения?

### **Решение**

Для определения соответствия эмпирического распределения теоретическому (равномерному) можно использовать критерий Колмогорова. Для этого вносим экспериментальные данные в таблицу (табл. 6.7) и проводим стандартные вычисления.

Таблица 6.7

Позиции желтого цвета	Частоты		Накопленные частоты		$d$
	$f_{\text{экс}}$	$f_{\text{теор}}$	$F_{\text{экс.}}$	$F_{\text{теор.}}$	
1	24	12,75	24	12,75	11,25
2	15	12,75	39	25,50	13,50
3	13	12,75	52	38,25	<b>13,75</b>
4	8	12,75	60	51,00	9,00
5	15	12,75	75	63,75	11,25
6	10	12,75	85	76,50	8,50
7	9	12,75	94	89,25	4,75
8	8	12,75	102	102	0

Отсюда:  $\lambda = \frac{d_{\text{max}}}{\sqrt{n}} = \frac{13,75}{\sqrt{102}} = 1,36$ .

### **Вывод**

Экспериментальное распределение не соответствует теоретическому (равномерному) распределению.

## **6. 3. Биномиальное распределение**

В отличие от нормального и равномерного распределений, описывающих поведение переменной в исследуемой выборке испытуемых, биномиальное распределение используется для иных целей. Оно слу-

жит для прогнозирования вероятности двух взаимоисключающих событий в некотором числе независимых друг от друга испытаний.

Классический пример биномиального распределения – подбрасывание монеты, которая падает на твердую поверхность. Равновероятны два исхода (события): 1) монета падает «орлом» (вероятность равна  $p$ ) или 2) монета падает «решкой» (вероятность равна  $q$ ). Если третьего исхода не дано, то  $p = q = 0,5$  и  $p + q = 1$ . Используя формулу биномиального распределения, можно определить, например, какова вероятность того, что в 50 испытаниях (число подбрасываний монеты) последняя выпадет «орлом», предположим, 25 раз.

Для дальнейших рассуждений введем общепринятые обозначения:

$n$  – общее число наблюдений;

$i$  – число интересующих нас событий (исходов);

$n - i$  – число альтернативных событий;

$p$  – эмпирически определенная (иногда – предполагаемая) вероятность интересующего нас события;

$q$  – вероятность альтернативного события;

$P_n(i)$  – прогнозируемая вероятность интересующего нас события  $i$  по определенному числу наблюдений  $n$ .

Формула биномиального распределения:

$$P_n(i) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot p^i \cdot q^{n-i}. \quad (6.7)$$

В случае равновероятного исхода событий ( $p = q$ ) можно использовать упрощенную формулу:

$$P_n(i) = \frac{n!}{i!(n-i)!} \cdot 0,5^n. \quad (6.8)$$

Рассмотрим три примера, иллюстрирующие использование формул биномиального распределения в психологических исследованиях.

### **Пример 1**

Предположим, что 3 студента решают задачу повышенной сложности. Для каждого из них равновероятны 2 исхода: (+) – решение и (–) – нерешение задачи. Всего возможно 8 разных исходов ( $2^3 = 8$ ).

Вероятность того, что ни один студент не справится с задачей, равна  $1/8$  (вариант 8); 1 студент справится с задачей:  $P = 3/8$  (варианты 4, 6, 7); 2 студента –  $P = 3/8$  (варианты 2, 3, 5) и 3 студента –  $P = 1/8$  (вариант 1).

Студент	Варианты исходов							
	1	2	3	4	5	6	7	8
A	+	+	+	+	–	–	–	–
B	+	+	–	–	+	+	–	–
C	+	–	+	–	+	–	+	–

### **Пример 2**

Предположим, 5 студентов выполняют интеллектуальный тест повышенной сложности. Правильное выполнение теста «+», неправильное «–». Каждый студент может иметь 2 возможных исхода (+ или –), причем вероятность каждого из этих исходов равна 0,5.

Студенты	1	2	3	4	5
Возможные исходы	+	+	+	+	+
	–	–	–	–	–

Необходимо определить вероятность того, что трое из 5 студентов успешно справятся с данной задачей.

#### **Решение**

Всего возможных исходов:  $2^5 = 32$ .

Общее число вариантов 3(+) и 2(–) составляет

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 10.$$

Следовательно, вероятность ожидаемого исхода равна  $10/32 \approx 0,31$ .

### **Пример 3**

Считается, что число экстравертов и интровертов в однородной группе испытуемых является приблизительно одинаковым.

#### **Задание**

Определить вероятность того, что в группе из 10 случайных испытуемых обнаружится 5 экстравертов.

#### **Решение**

1. Вводим обозначения:  $p = q = 0,5$ ;  $n = 10$ ;  $i = 5$ ;  $P_{10}(5) = ?$

2. Используем упрощенную формулу (см. выше):

$$P_{10}(5) = \frac{10!}{5! \cdot 5!} \cdot 0,5^{10} = \frac{3628800}{120^2} \cdot 0,00098 = 0,246.$$

#### **Вывод**

Вероятность того, что среди 10 случайных испытуемых обнаружится 5 экстравертов, составляет 0,246.

## **6. 4. Распределение Пуассона**

Распределение Пуассона является частным случаем биномиального распределения, используемым при очень низкой вероятности интересующих нас событий. Другими словами, это распределение описывает вероятность редких событий. Формулой Пуассона можно пользоваться при  $p < 0,01$  и  $q \geq 0,99$ .

Уравнение Пуассона является приближенным и описывается следующей формулой:

$$P_n(i) \approx \frac{\mu^i}{i!} \cdot e^{-\mu} = \frac{(\bar{p} \cdot n)^i}{i!} \cdot e^{-\bar{p} \cdot n}, \quad (6.9)$$

где  $\mu$  представляет собой произведение средней вероятности события и числа наблюдений.

В качестве примера рассмотрим алгоритм решения следующей задачи.

### **Условие задачи**

За несколько лет в 21 крупной клинике России было проведено массовое обследование новорожденных на предмет заболевания младенцев болезнью Дауна (выборка в среднем составляла 1000 новорожденных в каждой клинике). Были получены следующие данные:

Число клиник	11	6	2	1	1	0
Число заболеваний	0	1	2	3	4	5

### **Задание**

1. Определить среднюю вероятность заболевания (в пересчете на число новорожденных).
2. Определить, на какое число новорожденных в среднем приходится одно заболевание.
3. Определить вероятность того, что среди 100 случайно выбранных новорожденных обнаружится 2 младенца с болезнью Дауна.

### **Решение**

1. Определяем среднюю вероятность заболевания. При этом мы должны руководствоваться следующими рассуждениями. Болезнь Дауна зарегистрирована лишь в 10 клиниках из 21. В 11 клиниках заболеваний не обнаружено, в 6 клиниках зарегистрировано по 1 случаю, в 2 клиниках – 2 случая, в 1-й клинике – 3 и в 1-й клинике – 4 случая болезни. 5 случаев заболевания не было обнаружено ни в одной клинике. Для того чтобы определить среднюю вероятность заболевания, необходимо общее число случаев ( $6 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 = 17$ ) разделить на общее число новорожденных (21000):

$$\bar{p} = \frac{N_{\text{клиник}}}{N_{\text{заболеваний}}} = \frac{17}{21000} = 0,00081.$$

2. Число новорожденных, на которое приходится одно заболевание, является величиной обратной средней вероятности, т. е. равно общему числу новорожденных, отнесенному к числу зарегистрированных случаев:

$$N = \frac{1}{\bar{p}} = \frac{1}{0,00081} = 1235.$$

3. Подставляем значения  $p = 0,00081$ ,  $n = 100$  и  $i = 2$  в формулу Пуассона:

$$P_{100}(2) \approx \frac{(0,00081 \cdot 100)^2}{2!} \cdot e^{-0,00081 \cdot 100} = 0,00328 \cdot 0,922 = 0,003.$$

### **Ответ**

Вероятность того, что среди 100 случайно выбранных новорожденных обнаружится 2 младенца с болезнью Дауна, составляет 0,003 (0,3%).

### Задача 6. 1

#### Задание

Пользуясь данными задачи 5.1 по времени сенсомоторной реакции, вычислить асимметрию и эксцесс распределения ВР.

### Задача 6. 2

200 учащихся выпускных классов были протестированы на уровень интеллектуальности ( $IQ$ ). После нормирования полученного распределения  $IQ$  по стандартному отклонению были получены следующие результаты:

Классовый интервал	Частоты $IQ$	Классовый интервал	Частоты $IQ$
$-4,0 \div -3,5 \sigma$	0	$0 \div 0,5 \sigma$	31
$-3,5 \div -3,0 \sigma$	2	$0,5 \div 1,0 \sigma$	14
$-3,0 \div -2,5 \sigma$	6	$1,0 \div 1,5 \sigma$	4
$-2,5 \div -2,0 \sigma$	12	$1,5 \div 2,0 \sigma$	2
$-2,0 \div -1,5 \sigma$	18	$2,0 \div 2,5 \sigma$	1
$-1,5 \div -1,0 \sigma$	28	$2,5 \div 3,0 \sigma$	1
$-1,0 \div -0,5 \sigma$	39	$3,0 \div 3,5 \sigma$	0
$-0,5 \sigma \div 0$	42	$3,5 \div 4,0 \sigma$	0

#### Задание

Пользуясь критериями Колмогорова и хи-квадрат, определить, соответствует ли полученное распределение показателей  $IQ$  нормальному.

### Задача 6. 3

У взрослого испытуемого (мужчина 25 лет) исследовалось время простой сенсомоторной реакции (ВР) в ответ на звуковой стимул с постоянной частотой в 1 кГц и интенсивностью 40 дБ. Стимул предъявлялся стократно с интервалами 3 – 5 секунд. Отдельные значения ВР по 100 повторностям распределилось следующим образом:

Время реакции, мс	100÷11	110÷12	120÷13	130÷14	140÷15	150÷16	160÷17	170÷18
	0	0	0	0	0	0	0	0
Число испытуемых	9	15	28	30	8	5	3	2

#### Задание

1. Построить частотную гистограмму распределения ВР; определить среднее значение ВР и величину стандартного отклонения.

2. Рассчитать коэффициент асимметрии и показатель эксцесса распределения ВР; на основании полученных значений  $As$  и  $Ex$  сделать вывод о соответствии или несоответствии данного распределения нормальному.

## ГЛАВА 7 МЕРЫ РАЗЛИЧИЙ

### 7. 1. Постановка проблемы

Предположим, что имеются две независимые друг от друга выборки испытуемых  $x$  и  $y$ . *Независимыми* выборки считаются тогда, когда один и тот же субъект (испытуемый) фигурирует только в одной выборке. Задача состоит в том, чтобы сравнить между собой эти выборки (два ряда переменных) на предмет их различий.

Естественно, что как бы ни были близки между собой значения переменных в первой и второй выборке, какие-то, пусть даже незначительные, различия между ними будут обнаруживаться. С точки же зрения математической статистики нас интересует вопрос, являются ли различия между этими выборками статистически достоверными (статистически значимыми) или недостоверными (случайными).

Наиболее распространенными критериями достоверности различий между выборками являются параметрические меры различий – *критерий Стьюдента* и *критерий Фишера*. В ряде случаев используются непараметрические критерии – *критерий Q Розенбаума*, *U-критерий Манна-Уитни* и др. Особое место занимает *угловое преобразование Фишера  $\phi^*$* , позволяющие сравнивать друг с другом значения, выраженные в процентах (процентных долях). И, наконец, как частный случай, для сравнения выборок могут быть использованы критерии, характеризующие форму распределений выборок – *критерий  $\chi^2$  Пирсона* и *критерий  $\lambda$  Колмогорова – Смирнова*.

В целях наилучшего усвоения данной темы мы поступим следующим образом. Одну и ту же задачу мы решим четырьмя методами с использованием четырех различных критериев – Розенбаума, Манна-Уитни, Стьюдента и Фишера.

#### *Условие задачи*

30 студентов (14 юношей и 16 девушек) во время экзаменационной сессии протестированы по тесту Спилбергера на уровень реактивной тревожности. Получены следующие результаты (табл. 7.1):

Таблица 7.1

Испытуемые	Уровень реактивной тревожности															
Юноши	32	34	28	43	35	26	41	32	40	39	42	38	44	33		
Девушки	34	30	37	43	42	44	46	36	45	28	34	41	40	35	42	39

#### *Задание*

Определить, являются ли статистически достоверными различия уровня реактивной тревожности у юношей и девушек.

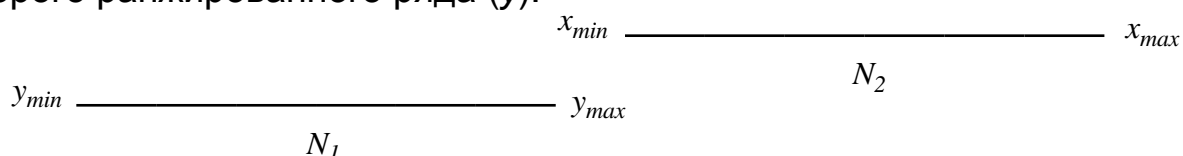
Задача представляется вполне типичной для психолога, специализирующегося в области педагогической психологии: кто более остро переживает экзаменационный стресс – юноши или девушки?

Если различия между выборками статистически достоверны, то существуют значимые половые различия в данном аспекте; если различия случайны (статистически недостоверны), от данного предположения следует отказаться.

## 7. 2. Непараметрический критерий Q Розенбаума

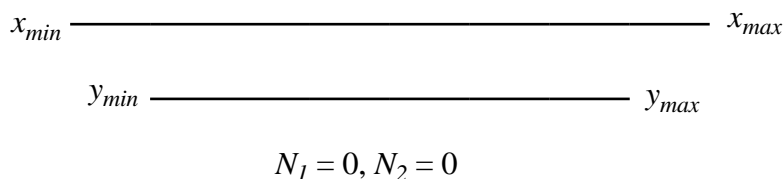
Q-критерий Розенбаума основан на сравнении «наложенных» друг на друга ранжированных рядов значений двух независимых переменных. При этом не анализируется характер распределения признака внутри каждого ряда – в данном случае имеет значение лишь ширина неперекрывающихся участков двух ранжированных рядов. При сравнении между собой двух ранжированных рядов переменных возможны 3 варианта:

1. Ранжированные ряды  $x$  и  $y$  не имеют области перекрытия, т. е. все значения первого ранжированного ряда ( $x$ ) больше всех значений второго ранжированного ряда ( $y$ ):

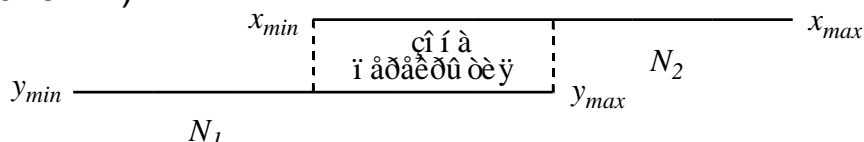


В данном случае различия между выборками, определяемые по любому статистическому критерию, безусловно достоверны, и использование критерия Розенбаума не требуется. Тем не менее на практике такой вариант встречается исключительно редко.

2. Ранжированные ряды полностью накладываются друг на друга (как правило, один из рядов находится внутри другого), неперекрывающиеся зоны отсутствуют. В данном случае критерий Розенбаума неприменим.



3. Имеется зона перекрытия рядов, а также две неперекрывающиеся области ( $N_1$  и  $N_2$ ), относящиеся к *разным* ранжированным рядам (обозначим  $x$  – ряд, сдвинутый в сторону больших,  $y$  – в сторону меньших значений):



Данный случай является типичным для использования критерия Розенбаума, при использовании которого следует соблюдать следующие условия:

1. Объем каждой выборки должен быть не менее 11.

2. Объемы выборок не должны существенно отличаться друг от друга.

Критерий  $Q$  Розенбаума соответствует числу неперекрывающихся значений:  $Q = N_1 + N_2$ . Вывод о достоверности различий между выборками делается в случае, если  $Q > Q_{кр}$ . При этом значения  $Q_{кр}$  находятся в специальных таблицах (см. Приложение, табл. VIII).

Введем обозначения:  $x$  – выборка девушек,  $y$  – выборка юношей. Для каждой выборки строим ранжированный ряд:

$x$ : 28 30 34 34 35 36 37 39 40 41 42 42 43 44 45 46

$y$ : 26 28 32 32 33 34 35 38 39 40 41 42 43 44

Подсчитывается число значений в неперекрывающихся областях ранжированных рядов. В ряду  $x$  неперекрывающимися являются значения 45 и 46, т. е.  $N_1 = 2$ ; в ряду  $y$  только 1 неперекрывающееся значение 26, т. е.  $N_2 = 1$ . Отсюда,  $Q = N_1 + N_2 = 1 + 2 = 3$ .

В табл. VIII Приложения определяется, что  $Q_{кр} = 7$  (для уровня значимости 0,95) и  $Q_{кр} = 9$  (для уровня значимости 0,99).

### **Вывод**

Поскольку  $Q < Q_{кр}$ , то по критерию Розенбаума различия между выборками не являются статистически достоверными.

### **Примечание**

Критерий Розенбаума может использоваться независимо от характера распределения переменных, т. е. в данном случае отпадает необходимость использования критериев  $\chi^2$  Пирсона и  $\lambda$  Колмогорова для определения типа распределений в обеих выборках.

## **7. 3. $U$ -критерий Манна – Уитни**

В отличие от критерия Розенбаума,  $U$ -критерий Манна – Уитни основан на определении зоны перекрытия между двумя ранжированными рядами, т. е. чем меньше зона перекрытия, тем достовернее различия между выборками. Для этого используется специальная процедура преобразования интервальных шкал в ранговые.

Рассмотрим алгоритм вычислений по  $U$ -критерию на примере предыдущей задачи.

Для более экономичной работы рекомендуется построение рабочей таблицы следующего вида (табл. 7.2).

Таблица 7.2

$x, y$	$R_{xy}$	$R_{xy}^*$	$R_x$	$R_y$
1	2	3	4	5
26	1	1	2,5	1
28	2	2,5		2,5
28	3	2,5	4	
30	4	4	5,5	
32	5	5,5		
32	6	5.5		5.5

33	7	7		7
34	8	9	9	
34	9	9	9	
34	10	9		9
35	11	11,5	11,5	
35	12	11,5		11,5
36	13	13	13	
37	14	14	14	
38	15	15		15
39	16	16,5	16,5	
39	17	16,5		16,5
40	18	18,5	18,5	
40	19	18,5		18,5
41	20	20,5	20,5	
41	21	20,5		20,5
42	22	23	23	
42	23	23	23	
42	24	23		23
43	25	25,5	25,5	
43	26	25,5		25,5
44	27	27,5	27,5	
44	28	27,5		27,5
45	29	29	29	
46	30	30	30	
		$\Sigma$	276,5	188,5

Рекомендуется следующий порядок заполнения таблицы и соответствующих вычислений:

1. Из двух независимых выборок строим единый ранжированный ряд. В данном случае значения для обеих выборок идут «вперемешку», столбец 1 ( $x, y$ ). В целях упрощения дальнейшей работы (в том числе и в компьютерном варианте) следует значения для разных выборок отмечать разным шрифтом (или разным цветом) с учетом того, что в дальнейшем мы будем их разносить по разным столбцам.
2. Преобразуем интервальную шкалу значений в порядковую (для этого переобозначаем все значения ранговыми числами от 1 до 30, столбец 2 ( $R_{xy}$ )).
3. Вводим поправки на связанные ранги (одинаковые значения переменной обозначаются одним и тем же рангом при условии, что сумма рангов не изменяется, столбец 3 ( $R_{xy}^*$ )). На этом этапе рекомендуется подсчитать суммы рангов во 2-м и 3-м столбце (если все поправки введены верно, то эти суммы должны быть равны).
4. Разносим ранговые числа в соответствии с их принадлежностью к той или иной выборке (столбцы 4 и 5 ( $R_x$  и  $R_y$ )).
5. Проводим вычисления по формуле:

$$U = n_x n_y + \frac{n_x(n_x + 1)}{2} - T_x, \quad (7.1)$$

где  $T_x$  – наибольшая из ранговых сумм;  $n_x$  и  $n_y$ , соответственно, объемы выборок. В данном случае следует иметь в виду, что если  $T_x < T_y$ , то обозначения  $x$  и  $y$  следует сменить на обратные.

6. Сравниваем полученное значение с табличным (см. Приложения, табл. IX). Вывод о достоверности различий между двумя выборками делается в случае, если  $U_{\text{эсп.}} < U_{\text{кр.}}$ .

В примере  $U = 14 \cdot 16 + \frac{16 \cdot 17}{2} - 276,5 = 83,5$ .  $U_{\text{эсп.}} = 83,5 > U_{\text{кр.}} = 71$ .

#### Вывод

Различия между двумя выборками по критерию Манна – Уитни не являются статистически достоверными.

### 7. 4. Критерий Стьюдента

В отличие от критериев Розенбаума и Манна-Уитни критерий  $t$  Стьюдента является параметрическим, т. е. основан на определении основных статистических показателей – средних значений в каждой выборке ( $\bar{x}$  и  $\bar{y}$ ) и их дисперсий ( $\sigma_x^2$  и  $\sigma_y^2$ ), рассчитываемых по стандартным формулам (см. раздел 5).

Использование критерия Стьюдента предполагает соблюдение следующих условий:

1. Распределения значений для обеих выборок должны соответствовать закону нормального распределения (см. раздел 6).

2. Суммарный объем выборок должен быть не менее 30 (для  $\beta_1 = 0,95$ ) и не менее 100 (для  $\beta_2 = 0,99$ ).

3. Объемы двух выборок не должны существенно отличаться друг от друга (не более чем в  $1,5 \div 2$  раза).

Идея критерия Стьюдента достаточно проста. Предположим, что значения переменных в каждой из выборок распределяются по нормальному закону, т. е. мы имеем дело с двумя нормальными распределениями, отличающимися друг от друга по средним значениям и дисперсии (соответственно  $\bar{x}$  и  $\sigma_x^2$ ,  $\bar{y}$  и  $\sigma_y^2$ , см. рис. 7.1).

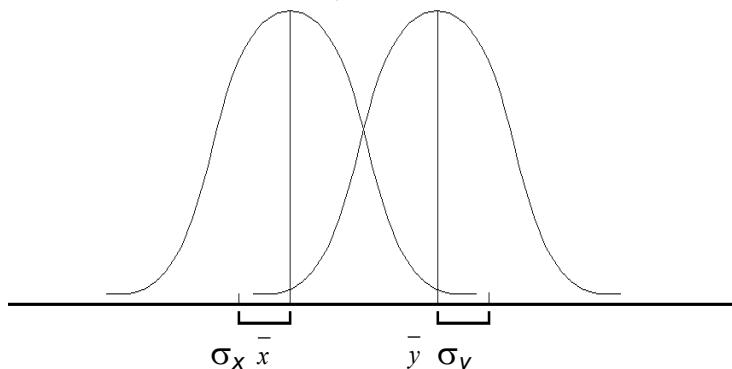


Рис. 7.1. Оценка различий между двумя независимыми выборками:  
 $\bar{x}$  и  $\bar{y}$  – средние значения выборок  $x$  и  $y$ ;  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  – стандартные отклонения

Видно, что различия между двумя выборками будут тем больше, чем больше разность между средними значениями и чем меньше их дисперсии (или стандартные отклонения).

В случае независимых выборок коэффициент Стьюдента определяют по формуле:

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n_x} + \frac{\sigma_y^2}{n_y}}}, \quad (7.2)$$

где  $n_x$  и  $n_y$  – соответственно численность выборок  $x$  и  $y$ .

После вычисления коэффициента Стьюдента в таблице стандартных (критических) значений  $t$  (см. Приложение, табл. X) находят величину, соответствующую числу степеней свободы  $\nu = n_x + n_y - 2$ , и сравнивают ее с рассчитанной по формуле. Если  $t_{\text{экс.}} \leq t_{\text{кр.}}$ , то гипотезу о достоверности различий между выборками отвергают, если же  $t_{\text{экс.}} > t_{\text{кр.}}$ , то ее принимают.

Другими словами, выборки достоверно отличаются друг от друга, если вычисленный по формуле коэффициент Стьюдента больше табличного значения для соответствующего уровня значимости.

В рассмотренной нами ранее задаче вычисление средних значений и дисперсий дает следующие значения:  $x_{\text{ср.}} = 38,5$ ;  $\sigma_x^2 = 28,40$ ;  $y_{\text{ср.}} = 36,2$ ;  $\sigma_y^2 = 31,72$ .

Можно видеть, что среднее значение тревожности в группе девушек выше, чем в группе юношей. Тем не менее эти различия настолько незначительны, что вряд ли они являются статистически значимыми. Разброс значений у юношей, напротив, несколько выше, чем у девушек, но различия между дисперсиями также невелики.

Подставляем значения в формулу:  $t = \frac{38,5 - 36,2}{\sqrt{\frac{28,40}{16} + \frac{31,72}{14}}} = 1,14$ .

### Вывод

$t_{\text{экс.}} = 1,14 < t_{\text{кр.}} = 2,05$  ( $\beta_1 = 0,95$ ). Различия между двумя сравниваемыми выборками не являются статистически достоверными. Данный вывод вполне согласуется с таковым, полученным при использовании критериев Розенбаума и Манна-Уитни.

Другой способ определения различий между двумя выборками по критерию Стьюдента состоит в вычислении доверительного интервала стандартных отклонений. Доверительным интервалом называется среднеквадратичное (стандартное) отклонение, деленное на корень квадратный из объема выборки и умноженное на стандартное значение коэффициента Стьюдента для  $n - 1$  степеней свободы (соответственно,

$$\frac{t_{n-1} \cdot \sigma_x}{\sqrt{n_x}} \text{ и } \frac{t_{n-1} \cdot \sigma_y}{\sqrt{n_y}}).$$

### Примечание

Величина  $\sigma/\sqrt{n_x} = m_x$  называется среднеквадратичной ошибкой (см. раздел 5). Следовательно, доверительный интервал есть среднеквадратичная ошибка, умноженная на коэффициент Стьюдента для данного объема выборки, где число степеней свободы  $v = n - 1$ , и заданного уровня значимости.

Две независимые друг от друга выборки считаются достоверно различающимися, если доверительные интервалы для этих выборок не перекрываются друг с другом. В нашем случае мы имеем для первой выборки  $38,5 \pm 2,84$ , для второй  $36,2 \pm 3,38$ .

Следовательно, случайные вариации  $x_i$  лежат в диапазоне  $35,66 \div 41,34$ , а вариации  $y_i$  – в диапазоне  $32,82 \div 39,58$ . На основании этого можно констатировать, что различия между выборками  $x$  и  $y$  статистически недостоверны (диапазоны вариаций перекрываются друг с другом). При этом следует иметь в виду, что ширина зоны перекрытия в данном случае не имеет значения (важен лишь сам факт перекрытия доверительных интервалов).

Метод Стьюдента для зависимых друг от друга выборок (например, для сравнения результатов, полученных при повторном тестировании на одной и той же выборке испытуемых) используют достаточно редко, поскольку для этих целей существуют другие, более информативные статистические приемы (см. раздел 10). Тем не менее, для данной цели в первом приближении можно использовать формулу Стьюдента следующего вида:

$$t = \frac{\sum (x_i - y_i)}{\sqrt{\frac{n \cdot \sum (x_i - y_i)^2 - [\sum (x_i - y_i)]^2}{(n-1)}}}. \quad (7.3)$$

Полученный результат сравнивают с табличным значением для  $n - 1$  степеней свободы, где  $n$  – число пар значений  $x$  и  $y$ . Результаты сравнения интерпретируются точно так же, как и в случае вычисления различий между двумя независимыми выборками.

### **7.5. Критерий Фишера**

Критерий Фишера ( $F$ ) основан на том же принципе, что и критерий Стьюдента, т. е. предполагает вычисление средних значений и дисперсий в сравниваемых выборках. Чаще всего используется при сравнении между собой неравноценных по объему (разных по численности) выборок. Критерий Фишера является несколько более жестким, чем критерий Стьюдента, а потому более предпочтителен в тех случаях, когда возникают сомнения в достоверности различий (например, если по критерию Стьюдента различия достоверны при нулевом и недостоверны при первом уровне значимости).

Формула Фишера выглядит следующим образом:

$$F = \frac{n_x \cdot n_y}{n_x + n_y} \cdot \frac{d^2}{\sigma_z^2}, \quad (7.4)$$

где  $d^2 = (\bar{x} - \bar{y})^2$  и  $\sigma_z^2 = \frac{\sigma_x^2(n_x - 1) + \sigma_y^2(n_y - 1)}{n_x + n_y - 2}$ . (7.5, 7.6)

В рассматриваемой нами задаче  $d^2 = 5,29$ ;  $\sigma_z^2 = 29,94$ .

Подставляем значения в формулу:  $F = \frac{16 \cdot 14}{16 + 14} \cdot \frac{5,29}{29,94} = 1,32$ .

В табл. XI Приложений находим, что для уровня значимости  $\beta_1 = 0,95$  и  $v = n_x + n_y - 2 = 28$  критическое значение составляет 4,20.

**Вывод**

$F = 1,32 < F_{кр.} = 4,20$ . Различия между выборками статистически недостоверны.

## 7. 6. Критерий $\varphi^*$ – угловое преобразование Фишера

Критерий  $\varphi^*$  Фишера предназначен для сопоставления двух выборок по частоте встречаемости интересующего исследователя эффекта. Он оценивает достоверность различий между процентными долями двух выборок, в которых зарегистрирован интересующий нас эффект. Допускается также сравнение процентных соотношений и в пределах одной выборки.

Суть углового преобразования Фишера состоит в переводе процентных долей в величины центрального угла, который измеряется в радианах. Большей процентной доле будет соответствовать больший угол  $\varphi$ , а меньшей доле – меньший угол, но отношения здесь нелинейные:

$$\varphi = 2 \arcsin(\sqrt{P}) \quad (7.7)$$

где  $P$  – процентная доля, выраженная в долях единицы.

При увеличении расхождения между углами  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  и увеличении численности выборок значение критерия возрастает.

Критерий Фишера вычисляется по следующей формуле:

$$\varphi^* = (\varphi_1 - \varphi_2) \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2}{n_1 + n_2}} \quad (7.8)$$

где  $\varphi_1$  – угол, соответствующий большей процентной доле;  $\varphi_2$  – угол, соответствующий меньшей процентной доле;  $n_1$  и  $n_2$  – соответственно, объем первой и второй выборок.

Вычисленное по формуле значение сравнивается со стандартным ( $\varphi^*_{ст} = 1,64$  для  $\beta_1 = 0,95$  и  $\varphi^*_{ст} = 2,31$  для  $\beta_2 = 0,99$ ). Различия между двумя выборками считаются статистически достоверными, если  $\varphi^* > \varphi^*_{ст}$  для данного уровня значимости.

### Пример

Различаются ли между собой две группы студентов по успешности выполнения достаточно сложной задачи. В первой группе из 20 человек с ней справилось 12 студентов, во второй – 10 человек из 25.

*Решение*

1. Вводим обозначения:  $n_1 = 20$ ,  $n_2 = 25$ .

2. Вычисляем процентные доли  $P_1$  и  $P_2$ :  $P_1 = 12 / 20 = 0,6$  (60%),  $P_2 = 10 / 25 = 0,4$  (40%).

3. В табл. XII Приложений находим соответствующие процентным долям значения  $\varphi$ :  $\varphi_1 = 1,772$ ,  $\varphi_2 = 1,369$ .

$$\varphi^* = (1,772 - 1,369) \cdot \sqrt{\frac{20 \cdot 25}{20 + 25}} = 1,34.$$

Отсюда:

*Вывод*

Различия между группами не являются статистически достоверными, поскольку  $\varphi^* < \varphi^*_{\text{ст}}$  для 1-го и тем более для 2-го уровня значимости.

### 7.7. Использование критерия $\chi^2$ Пирсона и критерия $\lambda$ Колмогорова для оценки различий между двумя выборками

Использование критерия  $\chi^2$  для оценки соответствия экспериментальных распределений теоретическим (нормальному или равномерному) подробно обсуждалось в разделе 6. Тот же критерий может использоваться и для сравнения двух эмпирических распределений на предмет достоверности различий между ними.

В качестве примера рассмотрим следующую задачу:

*Условие задачи*

В опытах с участием 100 испытуемых (50 мужчин и 50 женщин) регистрировалось время простой сенсомоторной реакции (BCMP) в ответ на звуковой стимул. Получены следующие результаты (табл. 7.3):

Таблица 7.3

BCMP в секундах							
Классовый Интервал	0,10 ÷ 0,12	0,12 ÷ 0,14	0,14 ÷ 0,16	0,16 ÷ 0,18	0,18 ÷ 0,20	0,20 ÷ 0,22	0,22 ÷ 0,24
Частоты встречаемости BCMP							
Мужчины	2	15	26	5	2	0	0
Женщины	0	12	20	8	7	2	1

*Задание*

Пользуясь критерием  $\chi^2$  Пирсона, определить, достоверны ли различия распределений BCMP у мужчин и женщин.

*Решение*

1. Строим рабочую таблицу для предварительных расчетов (табл. 7.4):

Таблица 7.4

Обозначение интервала	Классовый интервал в секундах	Эмпирические частоты (мужчины)	Эмпирические частоты (женщины)	Сумма эмпирических частот	Теоретические частоты
1	2	3	4	5	6
A	0,10 ÷ 0,12	2	0	2	1
B	0,12 ÷ 0,14	15	12	27	13,5
C	0,14 ÷ 0,16	26	20	46	23
D	0,16 ÷ 0,18	5	8	13	6,5
E	0,18 ÷ 0,20	2	7	9	4,5
F	0,20 ÷ 0,22	0	2	2	1
G	0,22 ÷ 0,24	0	1	1	0,5
Сумма		50	50	100	

Столбец 1 служит исключительно для экономии: в дальнейшем не будут указываться границы классовых интервалов – достаточно того, что распределение включает в себя 7 количественных градаций (классов). В столбцах 2, 3 и 4 отражены данные из условия задачи. Столбец 5 служит для дальнейших вычислений.

Теоретические частоты (столбец 6) в данном случае вычисляются следующим образом:

1) в случае равноценных выборок теоретическая частота в каждом классе вычисляется как среднее арифметическое двух эмпирических частот;

2) если объемы выборок различны, то теоретическая частота вычисляется как сумма эмпирических частот в данной строке, умноженная на сумму в каждом столбце (по вертикали) и отнесенная к общей сумме частот.

Для дальнейших вычислений вносим данные в табл. 7.5:

Таблица 7.5

Интервал	Мужчины			Женщины		
	$f_{\text{эксп}}$	$f_{\text{теор.}}$	$\frac{(f_{\text{э}} - f_{\text{м}})^2}{f_{\text{м}}}$	$f_{\text{эксп}}$	$f_{\text{теор.}}$	$\frac{(f_{\text{э}} - f_{\text{м}})^2}{f_{\text{м}}}$
1	2	3	4	5	6	7
A	2	1	1,00	0	1	1,00
B	15	13,5	0,17	12	13,5	0,17
C	26	23	0,39	20	23	0,39
D	5	6,5	0,35	8	6,5	0,35
E	2	4,5	1,39	7	4,5	1,39
F	0	1	1,00	2	1	1,00
G	0	0,5	0,50	1	0,5	0,50

Можно видеть, что это – типичная таблица для вычисления критерия  $\chi^2$  (см. раздел 6). Значения в столбцах 3 и 6 для мужчин и женщин одинаковы; это естественно, так как теоретические частоты соответствуют средним значениям экспериментальных частот в каждой

выборке. Тем не менее  $\chi^2$  следует рассчитывать, суммируя все значения в столбцах 4 и 6 (т. е. по обеим выборкам).

В итоге получаем  $\chi^2 = 9,6$ . В табл. VI Приложений для уровня значимости 0,95 и  $v = N - 1 = 6$  находим значение  $\chi^2_{кр.}$ , равное 12,6.

### Вывод

Различия между распределениями не являются статистически достоверными.

Для решения задачи можно использовать критерий Колмогорова в несколько иной модификации, нежели при сравнении экспериментального распределения с теоретическим. Для этого оформляем рабочую таблицу следующего вида (табл. 7.6):

Таблица 7.6

	Экспериментальные частоты		Накопленные экспериментальные частоты		Относительные накопленные частоты		$d$
Интервал	$f_m$	$f_{ж}$	$F_m$	$F_{ж}$	$F_m^*$	$F_{ж}^*$	
1	2	3	4	5	6	7	8
A	2	0	2	0	0,04	0	0,04
B	15	12	17	12	0,34	0,24	0,10
C	26	20	43	32	0,86	0,64	<b>0,22</b>
D	5	8	48	40	0,96	0,80	0,16
E	2	7	50	47	1,00	0,94	0,06
F	0	2	50	49	1,00	0,98	0,02
G	0	1	50	50	1,00	1,00	0

Рекомендуется следующий порядок вычислений:

1. В столбце 1 – условные обозначения временных интервалов; в столбцах 2 и 3 – экспериментальные частоты мужчин (2) и женщин (3).

2. В столбцах 4 и 5 – накопленные частоты для мужчин (4) и женщин (5). Напомним, что накопленные частоты вычисляются путем простого суммирования частот от первого до последнего класса.

3. В столбцах 6 и 7 – относительные накопленные частоты ( $F^* = F/n$ ). Другими словами, каждая накопленная частота в столбцах 4 и 5 делится на 50.

4. Вычисляем критерий  $\lambda$  по формуле Колмогорова в следующей модификации:

$$\lambda = d_{\max} \cdot \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}. \quad (7.9)$$

В нашем случае:

$$\lambda = 0,22 \cdot \sqrt{\frac{50 \cdot 50}{50 + 50}} = 1,10.$$

### Вывод

Распределения отличаются друг от друга с вероятностью 0,822 (см. Приложения, табл. VII). Другими словами, соответствие между распределениями можно констатировать лишь с вероятностью 0,178.

## ЗАДАЧИ ПО ТЕМЕ

### Задача 7. 1

40 студентов (20 юношей и 20 девушек) обследованы на уровень нейротизма – эмоциональной стабильности по тесту Айзенка. Получены следующие результаты:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Юноши	10	12	5	9	6	7	11	8	7	4	9	12	14	8	6	7	11	9	10	8
Девушки	5	9	9	13	8	8	10	7	13	11	10	11	10	13	8	10	9	16	13	11

#### *Задание*

Определить достоверность различий по уровню нейротизма у юношей и девушек, выбрав один или несколько критериев, адекватных условию задачи.

### Задача 7. 2

#### *Условие задачи*

В психофизиологическом эксперименте 29 юношей и 27 девушек были протестированы методике РДО (реакция на движущийся объект). В числе показателей использовался следующий критерий: величина средней ошибки  $S$  остановки движущейся точки на линии. Получены следующие значения  $S$  (в миллисекундах) для двух групп испытуемых:

Юноши						Девушки					
№	$S$	№	$S$	№	$S$	№	$S$	№	$S$	№	$S$
1	37	11	41	21	32	1	87	11	41	21	24
2	31	12	44	22	24	2	41	12	21	22	21
3	32	13	26	23	32	3	17	13	37	23	21
4	26	14	29	24	24	4	46	14	27	24	51
5	37	15	40	25	23	5	59	15	37	25	52
6	24	16	40	26	33	6	17	16	44	26	23
7	18	17	30	27	29	7	33	17	38	27	52
8	46	18	39	28	38	8	23	18	41		
9	59	19	32	29	24	9	30	19	22		
10	19	20	21			10	40	20	40		

#### *Задание*

Определить достоверность различий между показателями РДО для юношей и девушек, выбрав адекватный критерий обработки результатов.

### Задача 7.3

#### *Условие задачи*

Первоклассники одной из средних школ (12 мальчиков и 10 девочек) были протестированы по детскому тесту Д. Векслера на уровень

интеллекта. Результаты тестирования (индивидуальные значения  $IQ$ ) представлены в таблице.

Испытуемый	пол	$IQ$	Испытуемый	Пол	$IQ$
1	м	85	12	м	91
2	м	78	13	д	115
3	м	138	14	д	112
4	м	86	15	д	98
5	м	79	16	д	93
6	м	105	17	д	97
7	м	95	18	д	101
8	м	94	19	д	117
9	м	100	20	д	102
10	м	134	21	д	92
11	м	87	22	д	111

**Задание.** Проанализировать полученные результаты на предмет половых различий в уровне интеллекта детей.

## ГЛАВА 8 МЕРЫ СВЯЗИ

### 8. 1. Постановка проблемы

Многие психологические черты, свойства, признаки не являются независимыми, а определенным образом взаимосвязаны между собой. Поэтому психологу часто приходится иметь дело с выявлением наличия и характера связи между этими признаками, свойствами, чертами. Это позволяет в известной степени минимизировать число изучаемых признаков, объединяя их в более крупные конгломераты, особенно в тех случаях, когда число таких признаков достаточно велико.

В математическом смысле задача состоит в нахождении связи между двумя рядами переменных ( $x_i$  и  $y_i$ ), измеренных на одной и той же выборке испытуемых. О наличии связи (корреляции) между этими переменными можно говорить в тех случаях, когда изменение величины  $x$  ведет к закономерному изменению величины  $y$ , и если характер изменений является предсказуемым.

### 8. 2. Представление данных

Данные о связи двух переменных могут быть представлены либо графически (в виде диаграмм рассеивания), либо путем вычисления коэффициентов корреляции по соответствующим формулам.

В графическом изображении каждый испытуемый может быть представлен точкой в координатах  $y = f(x)$ , причем величины  $x_i$  и  $y_i$  соответствуют значениям двух исследуемых признаков. Выборка испытуемых в этих координатах представляет собой «облако рассеивания» точек, которое может иметь различную форму (рис. 8.1).

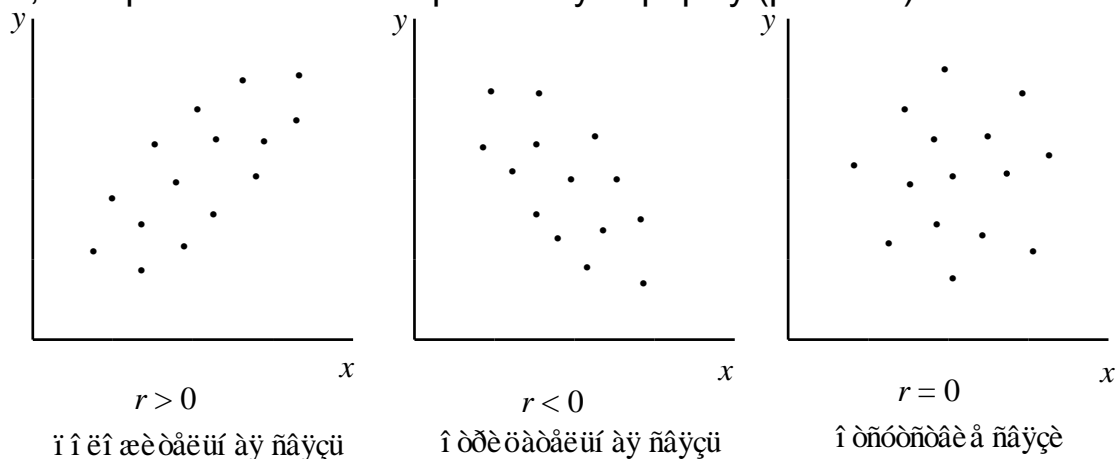


Рис. 8.1. Графическое представление связи между переменными (облако рассеивания точек имеет различную форму в зависимости от характера связи), объяснение в тексте

При наличии прямой (положительной) связи между переменными облако рассеивания имеет более или менее уплощенную эллиптическую форму, длинная ось которого направлена вправо и вверх. Другими словами, при возрастании значения одной переменной имеется тенденция к увеличению другой переменной.

В случае отрицательной связи между переменными длинная ось облака рассеивания направлена вправо вниз, т. е., увеличение значений одной переменной соответствует закономерному снижению значений другой.

Наконец, если облако рассеивания имеет округлую форму, то можно предположить, что корреляция между переменными отсутствует или, по крайней мере, она весьма незначительна.

В психологии используется несколько различных мер связи (коэффициентов корреляции), выбор которых определяется в первую очередь типом шкалы, который формирует исследуемая переменная величина. Чаще всего коэффициенты корреляции представляют собой величины, стандартизованные таким образом, что они могут принимать значения от  $-1$  (строгая обратная связь) до  $+1$  (строгая прямая связь). Вычисление коэффициента корреляции предполагает также определение его статистической значимости (достоверности) по соответствующим формулам или таблицам. Достоверность коэффициента корреляции может быть определена для определенного уровня значимости (0,95, 0,99 и т.д.).

### 8. 3. Коэффициент корреляции Фехнера

Коэффициент корреляции, предложенный во II-й половине XIX века Г. Т. Фехнером, является наиболее простой мерой связи между двумя переменными. Он основан на сопоставлении двух психологических признаков  $x_i$  и  $y_i$ , измеренных на одной и той же выборке, по сопоставлению знаков отклонений индивидуальных значений от среднего:  $s(x_i - \bar{x})$  и  $s(y_i - \bar{y})$ . Вывод о корреляции между двумя переменными делается на основании подсчета числа совпадений и несовпадений этих знаков.

#### Пример

Пусть  $x_i$  и  $y_i$  – два признака, измеренные на одной и той же выборке испытуемых. Для вычисления коэффициента Фехнера необходимо вычислить средние значения для каждого признака, а также для каждого значения переменной – знак отклонения от среднего (табл. 8.1):

Таблица 8.1

	$x_i$	$y_i$	$s(x_i - \bar{x})$	$s(y_i - \bar{y})$	Обозначение
	16	20	+	+	$a$
	15	17	-	-	$a$
	19	16	+	-	$b$
	12	22	-	+	$b$

	9	18	-	+	<i>b</i>
	20	12	+	-	<i>b</i>
	18	15	+	-	<i>b</i>
	14	18	-	+	<i>b</i>
	15	16	-	-	<i>a</i>
	17	18	+	+	<i>a</i>
Среднее	15,5	17,2			

В таблице: *a* – совпадения знаков, *b* – несовпадения знаков;  $n_a$  – число совпадений,  $n_b$  – число несовпадений (в данном случае  $n_a = 4$ ,  $n_b = 6$ ).

Коэффициент корреляции Фехнера вычисляется по формуле:

$$K_F = \frac{n_a - n_b}{n_a + n_b}. \quad (8.1)$$

В рассматриваемом случае:

$$K_F = \frac{4 - 6}{4 + 6} = -0,2.$$

#### Вывод

Между исследуемыми переменными существует слабая отрицательная связь.

Необходимо отметить, что коэффициент корреляции Фехнера не является достаточно строгим критерием, поэтому его можно использовать лишь на начальном этапе обработки данных и для формулировки предварительных выводов.

### 8. 4. Коэффициент корреляции Пирсона

Исходный принцип коэффициента корреляции Пирсона – использование произведения моментов (отклонений значения переменной от среднего значения):

$$(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + \dots + (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y}) = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (8.2)$$

Если сумма произведений моментов велика и положительна, то *x* и *y* связаны прямой зависимостью; если сумма велика и отрицательна, то *x* и *y* сильно связаны обратной зависимостью; наконец, в случае отсутствия связи между *x* и *y* сумма произведений моментов близка к нулю.

Для того чтобы статистика не зависела от объема выборки, берется не сумма произведений моментов, а среднее значение. Однако деление производится не на объем выборки, а на число степеней свободы  $n - 1$ .

Величина  $S_{xy} = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1}$  является мерой связи между *x* и *y* и

называется ковариацией *x* и *y*.

Во многих задачах естественных и технических наук ковариация является вполне удовлетворительной мерой связи. Ее недостатком является то, что диапазон ее значений не фиксирован, т. е. она может варьировать в неопределенных пределах.

Для того чтобы стандартизировать меру связи, необходимо избавиться от ковариации от влияния стандартных отклонений. Для этого надо разделить  $S_{xy}$  на  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ :

$$\frac{S_{xy}}{\sigma_x \cdot \sigma_y} = r_{xy}, \quad (8.3)$$

где  $r_{xy}$  - коэффициент корреляции, или произведение моментов Пирсона.

Общая формула для вычисления коэффициента корреляции выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} r_{xy} &= \frac{S_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \left[ \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1} \right] : \left[ \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 (y_i - \bar{y})^2}{n-1}} \right] = \\ &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\left[ \sum (x_i - \bar{x})^2 \right] \cdot \left[ \sum (y_i - \bar{y})^2 \right]}} = \text{(некоторые преобразования)} \\ &= \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \cdot \sum y_i}{n}}{\sqrt{\left[ \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \right] \cdot \left[ \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} \right]}} = \\ &= \frac{n \cdot \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{\left[ n \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \right] \cdot \left[ n \cdot \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2 \right]}}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

Влияние преобразования данных на  $r_{xy}$ :

1. Линейные преобразования  $x$  и  $y$  типа  $b x + a$  и  $d y + c$  не изменяют величину корреляции между  $x$  и  $y$ .

2. Линейные преобразования  $x$  и  $y$  при  $b < 0$ ,  $d > 0$ , а также при  $b > 0$  и  $d < 0$  изменяют знак коэффициента корреляции, не меняя его величины.

Достоверность (или, иначе, статистическая значимость) коэффициента корреляции Пирсона может быть определена разными способами:

По таблицам критических значений коэффициентов корреляции Пирсона и Спирмена (см. Приложение, табл. XIII). Если полученное в расчетах значение  $r_{xy}$  превышает критическое (табличное) значение для данной выборки, коэффициент Пирсона считается статистически значимым. Число степеней свободы в данном случае соответствует  $n - 2$ , где  $n$  – число пар сравниваемых значений (объем выборки).

По таблице XV Приложений, которая озаглавлена «Количество пар значений, необходимое для статистической значимости коэффициента корреляции». В данном случае необходимо ориентироваться на коэффициент корреляции, полученный в вычислениях. Он считается статистически значимым, если объем выборки равен или превышает табличное число пар значений для данного коэффициента.

По коэффициенту Стьюдента, который вычисляется как отношение коэффициента корреляции к его ошибке:

$$t_r = \frac{r}{m_r} \geq t_{st}(v = n - 2). \quad (8.5)$$

Ошибка коэффициента корреляции вычисляется по следующей формуле:

$$m_r = \sqrt{\frac{1 - r^2}{n - 2}} \quad (8.6)$$

где  $m_r$  - ошибка коэффициента корреляции,  $r$  - коэффициент корреляции;  $n$  - число сравниваемых пар.

Рассмотрим порядок вычислений и определение статистической значимости коэффициента корреляции Пирсона на примере решения следующей задачи.

#### *Условие задачи*

22 старшеклассника были протестированы по двум тестам: УСК (уровень субъективного контроля) и МКУ (мотивация к успеху). Получены следующие результаты (табл. 8.2):

Таблица 8.2

№№	УСК ( $x_i$ )	МКУ ( $y_i$ )	№№	УСК ( $x_i$ )	МКУ ( $y_i$ )
1	27	18	12	24	12
2	24	19	13	27	15
3	27	16	14	25	15
4	30	13	15	37	23
5	25	17	16	35	24
6	18	13	17	25	20
7	28	19	18	22	14
8	31	19	19	26	21
9	31	10	20	34	24
10	30	24	21	25	17
11	18	13	22	31	17

#### *Задание*

Проверить гипотезу о том, что для людей с высоким уровнем интернальности (балл УСК) характерен высокий уровень мотивации к успеху.

#### *Решение*

1. Используем коэффициент корреляции Пирсона в следующей модификации (см. формулу 8.4):

$$r_{xy} = \frac{\sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \cdot \sum y_i}{n}}{\sqrt{\left[ \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} \right] \left[ \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} \right]}}.$$

Для удобства обработки данных на микрокалькуляторе (в случае отсутствия необходимой компьютерной программы) рекомендуется

оформление промежуточной рабочей таблицы следующего вида (табл. 8.3):

Таблица 8.3

$x_i$	$y_i$	$x_i^2$	$y_i^2$	$x_i y_i$
$x_1$	$y_1$	$x_1^2$	$y_1^2$	$x_1 y_1$
$x_2$	$y_2$	$x_2^2$	$y_2^2$	$x_2 y_2$
$x_3$	$y_3$	$x_3^2$	$y_3^2$	$x_3 y_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$x_n$	$y_n$	$x_n^2$	$y_n^2$	$x_n y_n$
$\Sigma x_i$	$\Sigma y_i$	$\Sigma x_i^2$	$\Sigma y_i^2$	$\Sigma x_i y_i$

2. Проводим вычисления и подставляем значения в формулу:

$$\Sigma x_i = 600; \Sigma x_i^2 = 16864; \Sigma y_i = 383; \Sigma y_i^2 = 7025; \Sigma x_i y_i = 10689.$$

$$r_{xy} = \frac{10689 - \frac{600 \cdot 383}{22}}{\sqrt{\left(16864 - \frac{600^2}{22}\right) \left(7025 - \frac{383^2}{22}\right)}} = 0,58.$$

3. Определяем статистическую значимость коэффициента корреляции Пирсона тремя способами:

1-й способ:

В табл. XIII Приложений находим критические значения коэффициента для 1-го и 2-го уровней значимости:  $r_{кр.} = 0,42; 0,54$  ( $v = n - 2 = 20$ ).

Делаем вывод о том,  $r_{xy} > r_{кр.}$ , т. е. корреляция является статистически значимой для обоих уровней.

2-й способ:

Воспользуемся табл. XV, в которой определяем число пар значений (число испытуемых), достаточное для статистической значимости коэффициента корреляции Пирсона, равного 0,58: для 1-го, 2-го и 3-го уровней значимости оно составляет, соответственно, 12, 18 и 28.

Отсюда мы делаем вывод о том, что коэффициент корреляции является значимым для 1-го и 2-го уровня, но «не дотягивает» до 3-го уровня значимости.

3-й способ:

Вычисляем ошибку коэффициента корреляции и коэффициент Стьюдента как отношение коэффициента Пирсона к ошибке:

$$m_r = \sqrt{\frac{1 - r_{xy}^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{1 - 0,58^2}{20}} = 0,18; t = \frac{r_{xy}}{m_r} = \frac{0,58}{0,18} = 3,22.$$

В табл. X находим стандартные значения коэффициента Стьюдента для 1-го, 2-го и 3-го уровней значимости при числе степеней свободы  $v = n - 2 = 20$ :  $t_{кр.} = 2,09; 2,85; 3,85$ .

### Общий вывод

Корреляция между показателями тестов УСК и МКУ является статистически значимой для 1-го и 2-го уровней значимости.

## 8. 5. Коэффициент ранговой корреляции Спирмена

Коэффициент корреляции Спирмена ( $r_s$ ) используется в тех случаях, когда оба ряда переменных представлены ранговыми (порядковыми) шкалами. Для вычисления коэффициента Спирмена можно пользоваться двумя разными формулами, которые дают, в принципе, один и тот же результат:

$$1) \quad r_s = 1 - \frac{6 \sum (x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)}; \quad (8.7)$$

$$2) \quad r_s = \frac{3}{n-1} \cdot \left[ \frac{4 \sum x_i y_i}{n \cdot (n+1)} - (n+1) \right]. \quad (8.8)$$

Коэффициент корреляции Спирмена, так же как и  $r_{xy}$ , может варьировать от  $-1$  до  $+1$ .  $r_s = 1$  только в том случае, когда ранги обоих признаков в точности совпадают по  $x$  и  $y$ .

При расчете коэффициента Спирмена вручную (на микрокалькуляторе) рекомендуется использовать рабочую таблицу для промежуточных вычислений, которая имеет следующий вид:

$x_i$	$y_i$	$x_i - y_i$	$(x_i - y_i)^2$	$x_i y_i$
1	2	3	4	5
$x_1$	$y_1$	$x_1 - y_1$	$(x_1 - y_1)^2$	$x_1 y_1$
$x_2$	$y_2$	$x_2 - y_2$	$(x_2 - y_2)^2$	$x_2 y_2$
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
$x_n$	$y_n$	$x_n - y_n$	$(x_n - y_n)^2$	$x_n y_n$
$\sum x_i$	$\sum y_i$	$\sum (x_i - y_i)$	$\sum (x_i - y_i)^2$	$\sum x_i y_i$

В зависимости от выбора формулы можно использовать столбцы 1 ÷ 4 либо 1, 2, 5.

Если в рядах переменных (или хотя бы в одном из них) имеются связанные (повторяющиеся) ранги, то следует пользоваться формулой (8.7) с соответствующей поправкой на связанные ранги:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum (x_i - y_i)^2 + T_x + T_y}{n(n^2 - 1)} \quad (8.9)$$

где  $T_x = (N_x^3 - N_x):12$  и  $T_y = (N_y^3 - N_y):12$  ( $N_x$  и  $N_y$ , соответственно, число связанных рангов в ряду  $x$  и в ряду  $y$ ).

Статистическая значимость коэффициента ранговой корреляции Спирмена определяется аналогично значимости коэффициента корреляции Пирсона (табл. XIII, XV и X Приложений).

Рассмотрим порядок расчета коэффициента Спирмена на примере следующей задачи.

*Условие задачи*

12 учащихся были проранжированы психологом по их открытой неприязни к преподавателю ( $x_i$ ) и к другим учащимся ( $y_i$ ). Результаты экспертной оценки приведены ниже (табл. 8.4):

Таблица 8.4

№№ Исп.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$x_i$	2	8	12	3	1	6	7	10	4	9	11	5
$y_i$	6	5	10	7	3	4	9	8	1	11	12	2

*Задание*

Определить, существует ли связь между открытой неприязнью учащихся к преподавателю и к другим учащимся.

*Решение*

Составляем рабочую таблицу для вычисления коэффициента корреляции Спирмена (табл. 8.5) и вносим полученные результаты в соответствующие формулы:

Таблица 8.5

$x_i$	$y_i$	$(x_i - y_i)^2$	$x_i y_i$
2	6	16	12
8	5	9	40
12	10	4	120
3	7	16	21
1	3	4	3
6	4	4	24
7	9	4	63
10	8	4	80
4	1	9	4
9	11	4	99
11	12	1	132
5	2	9	10
	$\Sigma$	84	608

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum (x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 84}{12 \cdot 143} = 0,71;$$

$$r_s = \frac{3}{n-1} \cdot \left[ \frac{4 \sum x_i y_i}{n(n+1)} - (n+1) \right] = \frac{3}{11} \cdot \left( \frac{4 \cdot 608}{12 \cdot 13} - 13 \right) = 0,71.$$

В таблице критических значений коэффициентов корреляции Пирсона и Спирмена находим:  $r_{кр} = 0,58$  ( $\beta_1 = 0,95$ );  $0,71$  ( $\beta_2 = 0,71$ ).

*Вывод*

Корреляция является статистически значимой для 1-го уровня.

## 8.6. Коэффициент ранговой корреляции Кендалла

Коэффициент корреляции Кендалла используется в случае, когда переменные представлены двумя порядковыми шкалами при условии, что связанные ранги отсутствуют. Вычисление коэффициента Кендалла связано с подсчетом числа совпадений и инверсий. Рассмотрим эту процедуру на примере предыдущей задачи.

Алгоритм решения задачи следующий:

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum (x_i - y_i)^2}{n(n^2 - 1)} = 1 - \frac{6 \cdot 84}{12 \cdot 143} = 0,71;$$

$$r_s = \frac{3}{n-1} \cdot \left[ \frac{4 \sum x_i y_i}{n(n+1)} - (n+1) \right] = \frac{3}{11} \cdot \left( \frac{4 \cdot 608}{12 \cdot 13} - 13 \right) = 0,71.$$

1. Табл. 8.5 переоформляется таким образом, чтобы один из рядов (в данном случае ряд  $x_i$ ) оказался ранжированным. Другими словами, переставляются пары  $x$  и  $y$  в нужном порядке и вносятся данные в столбцы 1 и 2 табл. 8.6.

Таблица 8.6

$x_i$	$y_i$	Совп.	Инв.
1	3	9	2
2	6	6	4
3	7	5	4
4	1	8	0
5	2	7	0
6	4	6	0
7	9	3	2
8	5	4	0
9	11	1	2
10	8	2	0
11	12	0	1
12	10	0	0
	$\Sigma$	51	15

2. Определяется «степень ранжированности» 2-го ряда ( $y_i$ ). Эта процедура проводится в следующей последовательности:

а) берем первое значение неранжированного ряда «3». Подсчитывается количество рангов *ниже* данного числа, которые *больше* сравниваемого значения. Таких значений 9 (числа 6, 7, 4, 9, 5, 11, 8, 12 и 10). Заносим число 9 в столбец «совпадения». Затем подсчитываем количество значений, которые *меньше* трех. Таких значений 2 (ранги 1 и 2); вносим число 2 в графу «инверсии».

б) отбрасываем число 3 (мы с ним уже поработали) и повторяем процедуру для следующего значения «6»: число совпадений равно 6 (ранги 7, 9, 11, 8, 12 и 10), число инверсий – 4 (ранги 1, 2, 4 и 5). Вносим число 6 в графу «совпадения», а число 4 – в графу «инверсии».

в) аналогичным образом процедура повторяется до конца ряда; при этом следует помнить, что каждое «отработанное» значение исключается из дальнейшего рассмотрения (подсчитываются только ранги, которые лежат ниже данного числа).

3. Подсчитывается сумма совпадений ( $P$ ) и сумма инверсий ( $Q$ ); данные вносятся в одну и трех взаимозаменяемых формул коэффициента Кендалла (8.10). Проводятся соответствующие вычисления.

$$\tau = \frac{2(P-Q)}{n(n-1)} = 1 - \frac{4Q}{n(n-1)} = \frac{4P}{n(n-1)} - 1. \quad (8.10)$$

В нашем случае:

$$\tau = \frac{2 \cdot (51 - 15)}{12 \cdot 11} = \frac{4 \cdot 51}{12 \cdot 11} - 1 = 1 - \frac{4 \cdot 15}{12 \cdot 11} = 0,55.$$

В табл. XIV Приложений находятся критические значения коэффициента для данной выборки:  $\tau_{кр.} = 0,45; 0,59$ . Эмпирически полученное значение сравнивается с табличным.

*Вывод*

$\tau = 0,55 > \tau_{кр.} = 0,45$ . Корреляция статистически значима для 1-го уровня.

### 8.7. Дихотомический коэффициент корреляции ( $\phi$ )

Коэффициент  $\phi$  используется в качестве меры связи в тех случаях, когда признаки  $x$  и  $y$  измеряются в дихотомической шкале наименований и могут принимать значения 0 или 1. Рассмотрим способы вычислений коэффициента на пример задачи.

*Условие*

Проведен социологический опрос, касающийся отношения населения к религии. Было опрошено 250 респондентов (100 мужчин и 150 женщин). По результатам опроса оказалось, что среди мужчин 40 верующих и 60 атеистов, а среди женщин 85 оказались верующими и 65 – атеистами.

*Задание*

Определить, существует ли связь между полом и отношением к религии. Определить знак и статистическую значимость коэффициента корреляции.

*Решение*

Введем необходимые обозначения:

- шкала  $x$  – пол (1 – мужчины, 0 – женщины);
- шкала  $y$  – отношение к религии (1 – верующий, 0 – атеист).

Задачу можно решить двумя различными способами:

1-й способ:

1. Составляем матрицу сопряженности признаков следующего вида:

		Признак x		
		1	0	$\Sigma$
Признаку	1	$a$	$b$	$a + b$
	0	$c$	$d$	$c + d$
	$\Sigma$	$a + c$	$b + d$	

2. Подставляем в матрицу полученные экспериментальные значения. В данном случае в качестве измеряемого признака служит число испытуемых, принимающее разные значения при сочетании шкал x и y. Так, в клетку  $a$  матрицы вносится число испытуемых, имеющих единицу по обеим шкалам, т. е. число верующих мужчин; в клетку  $b$  – испытуемые, имеющие 0 по шкале x и 1 по шкале y (число верующих женщин) и т. д.

3.

		Признак x		
		1	0	$\Sigma$
Признак y	1	40	85	125
	0	60	65	125
	$\Sigma$	100	150	

4. Используем формулу дихотомического коэффициента корреляции:

$$\varphi = \frac{ad - bc}{\sqrt{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}} \quad (8.12)$$

5. Проводим вычисления:

$$\varphi = \frac{40 \cdot 65 - 85 \cdot 60}{\sqrt{125 \cdot 125 \cdot 100 \cdot 150}} = -0,163.$$

Интерпретация знака коэффициента корреляции состоит в том, что если он положителен, то 1 по x коррелирует с 1 по y, 0 по x коррелирует с 0 по y. Отрицательный коэффициент (как в нашем случае) свидетельствует о том, что 1 по x коррелирует с 0 по y, 0 по x коррелирует с 1 по y. Другими словами, женщины являются более верующими, а мужчины – более атеистичными.

По таблице критических значений дихотомического коэффициента корреляции (см. Приложение, табл. XVI) находим, что коэффициент является статистически значимым для 1-го уровня ( $\varphi_{кр.} = 0,13$ ).

При отсутствии соответствующей таблицы можно воспользоваться следующим соотношением (для 1-го уровня значимости):

$$z = \varphi \cdot \sqrt{n} > 1,96 \text{ и } \chi^2 = \varphi^2 \cdot n > 3,84.$$

В нашем случае:  $z = 2,58$  и  $\chi^2 = 6,64$ , т. е. вывод подтверждается.

Кроме того, в табл. VI Приложения можно определить статистическую значимость  $\chi^2$  и для более высоких уровней ( $v = 1$ ).

### Вывод

Корреляция между полом и отношением к религии является статистически значимой, что можно констатировать с вероятностью 0,95.

### 2-й способ:

Обозначим:  $p_x$  – относительная доля испытуемых, имеющих единицу по  $x$ ,  $q_x = 1 - p_x$  – имеющих нуль по  $x$ ; аналогично:  $p_y$  – доля испытуемых, имеющих единицу по  $y$ ,  $q_y = 1 - p_y$  – имеющих нуль по  $y$ ; наконец,  $p_{xy}$  – доля людей, имеющих единиц по  $x$  и по  $y$ .

Коэффициент  $\varphi$  вычисляется по формуле:

$$\varphi = \frac{p_{xy} - p_x p_y}{\sqrt{p_x q_x p_y q_y}}. \quad (8.13)$$

В нашем примере:  $p_x = 100:250 = 0,40$ ;  $q_x = 1 - 0,40 = 0,60$ ;  $p_y = 120:250 = 0,50$ ;  $q_y = 1 - 0,50 = 0,50$ ;  $p_{xy} = 40:250 = 0,16$ . Подставляя значения в формулу, получаем:  $\varphi = -0,163$ . Вывод подтверждается.

## 8. 8. Точечный бисериальный коэффициент корреляции ( $r_{pb}$ )

Точечный бисериальный коэффициент корреляции используется тогда, когда одна переменная формирует дихотомическую шкалу наименований, другая – шкалу интервалов или шкалу отношений. Порядок вычислений коэффициента рассмотрим на примере следующей задачи.

### Условие задачи

В группе испытуемых, протестированных по тесту Айзенка, обнаружено 15 экстравертов, из них 8 с высоким уровнем нейротизма (холерики) и 7 – с низким нейротизмом (сангвиники). Тест Спилбергера обнаружил у тех и других следующий уровень личностной тревожности (УЛТ):

Таблица 8.7

Тип темперамента	Уровень личностной тревожности							
Холерики	42	44	40	38	43	37	41	42
Сангвиники	34	36	38	40	35	38	39	

### Задание

Определить уровень связи и ее статистическую значимость между типом темперамента и уровнем личностной тревожности.

### Решение

1. Учитывая, что шкала типов темперамента дихотомическая, а шкала УЛТ – интервальная, используем формулу для вычисления точечно-бисериальный коэффициент корреляции:

$$r_{pb} = \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_0}{\sigma_y} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_0}{n(n-1)}}, \quad (8.14)$$

где  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_0$ , соответственно, средние значения переменных для двух интервальных шкал, т. е. средние значения УЛТ для холериков ( $\bar{y}_1$ ) и сангвиников ( $\bar{y}_0$ );  $\sigma_y$  – стандартное отклонение для всей выборки;  $n_1$  и  $n_0$  – численность каждой из сравниваемых выборок и  $n = n_1 + n_0$  – общее число испытуемых.

2. Определяем промежуточные значения:

$$\bar{y}_1 = 40,9; \bar{y}_0 = 37,1; \sigma_y = 2,95; n_1 = 8; n_0 = 7; n = 15.$$

3. Проводим вычисления:  $r_{pb} = \frac{40,9 - 37,1}{2,95} \cdot \sqrt{\frac{8 \cdot 7}{15 \cdot 14}} = 0,67.$

4. Определяем число степеней свободы:  $v = (n_1 - 1) + (n_0 - 1) = 13.$

5. В табл. XIII Приложений находим критические значения коэффициента корреляции (специальной таблицы для  $r_{pb}$  не существует):  $r_{кр.} = 0,51$  ( $\beta_1 = 0,95$ ) и  $0,64$  ( $\beta_2 = 0,99$ ).  $r_{pb} > r_{кр.}$ . В данном случае можно воспользоваться и табл. XV: как можно видеть, для статистической значимости коэффициента, равного  $0,67$ , достаточно 9 испытуемых для 1-го и 13 – для 2-го уровня (в нашем примере  $n = 15$ ).

**Вывод.** Корреляция между типом темперамента и уровнем личностной тревожности статистически значима для 1-го и 2-го уровней.

### 8. 9. Рангово-бисериальный коэффициент корреляции ( $r_{rb}$ )

Рангово-бисериальный коэффициент корреляции используется в том случае, когда одна переменная измеряется в дихотомической шкале наименований, другая представлена порядковой шкалой. В качестве примера рассмотрим следующую задачу.

*Условие задачи*

10 подростков (из них 6 мальчиков и 4 девочки) были проранжированы на предмет внешних проявлений агрессивности по отношению к своим сверстникам. Ранги распределились следующим образом (табл. 8.8):

Таблица 8.8

Пол	Ранг агрессивности					
Мальчики	1	2	4	6	7	8
Девочки	3	5	9	10		

*Задание*

Определить, существует ли связь между полом и агрессивностью в группе исследуемых подростков.

*Решение*

1. Учитывая, что мы имеем дело с дихотомической и ранговой шкалами, используем рангово-бисериальный коэффициент корреляции:

$$r_{rb} = \frac{2}{n} \cdot (\bar{y}_1 - \bar{y}_0) \quad (8.15)$$

где  $\bar{y}_1$  и  $\bar{y}_0$  - средние ранговые значения,  $n$  – численность выборки.

2. Проводим вычисления:

$$r_{rb} = \frac{2}{10} \cdot (4,67 - 6,75) = -0,42.$$

$v = (n_1 - 1) + (n_0 - 1) = 8$ ;  $r_{кр.} = 0,63$  ( $\beta_1 = 0,95$ ) и  $0,77$  ( $\beta_2 = 0,99$ ).  $r_{pb} > r_{кр.}$

**Вывод**

Корреляция между полом и агрессивностью для данной выборки испытуемых не является статистически значимой.

## 8. 10. Выбор меры связи

Для того, чтобы сделать адекватный выбор коэффициента корреляции для решения той или иной задачи, необходимо правильно определить тип шкалы, которым представлена та или иная переменная. Возможные сочетания различных типов шкал и соответствующие им коэффициенты корреляции представлены в табл. 8.9.

Таблица 8.9

Типы сравниваемых шкал		Коэффициент корреляции
1	2	
Дихотомическая	Дихотомическая	Дихотомический ( $\phi$ )
Дихотомическая	Порядковая (ранговая)	Рангово-бисериальный ( $r_{rb}$ )
Дихотомическая	Интервальная	Точечно-бисериальный ( $r_{pb}$ )
Ранговая	Ранговая	Коэффициент Пирсона ( $r_{xy}$ ) Коэффициент Спирмена ( $r_s$ ) Коэффициент Кендалла ( $\tau$ )
Ранговая	Интервальная	Коэффициент Пирсона ( $r_{xy}$ )
Интервальная	Интервальная	Коэффициент Пирсона ( $r_{xy}$ )

В некоторых случаях (как, правило, для упрощения обработки результатов) используют преобразования одной шкалы в другую. Тем не менее, эти преобразования могут быть сделаны только в одном направлении: интервальная  $\rightarrow$  ранговая  $\rightarrow$  дихотомическая шкала (но не наоборот). Порядок преобразования интервальной шкалы в ранговую был рассмотрен нами ранее (критерий Манна-Уитни, подраздел 7.3). В то же время напомним, что такое преобразование существенно обедняет информацию о поведении переменной и может использоваться лишь в случае необходимости.

## 8. 11. Матрицы корреляций

Матрицы корреляций (иначе, корреляционные матрицы) используются в тех случаях, когда нам необходимо определить попарные связи

между большим количеством переменных. Так, если мы имеем дело только с двумя переменными  $x$  и  $y$ , для определения связи между ними достаточно одного коэффициента связи ( $r_{xy}$ ). При наличии трех переменных ( $x, y, z$ ) необходимо использовать уже 3 коэффициента:  $r_{xy}$ ,  $r_{xz}$  и  $r_{yz}$ . Определение связи между 4 переменными предполагает вычисление 6-и, между 5 переменными – 10-и коэффициентов корреляции и т. д. Корреляционные матрицы служат для упорядочивания и наглядного представления этих значений. Общий вид корреляционной матрицы при использовании 6 измеряемых признаков (обозначим их латинскими буквами от  $A$  до  $F$ ) представлен в табл. 8.10.

Таблица 8.10

Переменные	$A$	$B$	$C$	$D$	$E$	$F$
$A$	1					
$B$		1				
$C$			1			
$D$				1		
$E$					1	
$F$						1

Надо ли заполнять всю площадь матрицы? Скорее всего, это необязательно. В данном случае необходимо руководствоваться двумя правилами:

1.  $r_{xx} = 1$ . Другими словами, корреляция переменной сама с собой равна единице. Таким образом, главная диагональ матрицы автоматически будет представлена единицами и вычислений не требует.

2.  $r_{xy} = r_{yx}$ , т. е. левая нижняя и правая верхняя половины матрицы будут зеркально отражать друг друга (так,  $r_{AD} = r_{DA}$  и т. д.). Поэтому заполняется лишь одна (как правило, правая верхняя) половина матрицы.

Руководствуясь этими правилами, легко вычислить общее число коэффициентов корреляции для упорядочения переменных. Рассуждаем следующим образом: для  $N$  переменных общая площадь матрицы будет составлять  $N^2$ ; вычитая число значений главной диагонали матрицы  $N$  и деля оставшееся значение пополам, получаем  $(N^2 - N)/2 = N(N - 1)/2$ . Так, если мы имеем 15 переменных, то число возможных связей между ними будет составлять  $15 \cdot (15 - 1)/2 = 105$ .

При большом числе переменных также такие упорядоченные матрицы корреляций могут оказаться довольно громоздкими. Для наглядности представления рекомендуется пользоваться «редуцированными» матрицами, т. е. удалять из них все коэффициенты корреляции, не достигающие критического значения. Работа с такими матрицами более удобна и экономична.

## Задача 8.1

### Условие задачи

Согласно концепции Г.Айзенка экстра-интроверсия и нейротизм являются независимыми переменными, не связанными между собой.

### Задание

Проверить исходную предпосылку Г.Айзенка, используя данные, полученные на 50 испытуемых, протестированных по тесту Айзенка (ЭИ – показатели экстра-интроверсии, Н – показатели нейротизма).

№	ЭИ	Н	№	ЭИ	Н	№	ЭИ	Н	№	ЭИ	Н	№	ЭИ	Н
1	7	18	11	7	18	21	13	10	31	13	18	41	9	6
2	13	15	12	9	10	22	18	17	32	19	8	42	11	4
3	12	20	13	10	12	23	5	11	33	5	11	43	18	18
4	15	9	14	9	15	24	16	23	34	7	14	44	18	9
5	14	20	15	6	20	25	13	16	35	6	8	45	15	21
6	16	15	16	17	12	26	15	18	36	11	10	46	10	11
7	11	15	17	12	8	27	7	7	37	17	11	47	8	5
8	8	20	18	9	13	28	16	20	38	11	12	48	13	15
9	9	15	19	17	8	29	16	9	39	7	15	49	17	16
10	18	9	20	8	12	30	14	11	40	14	10	50	12	15

## Задача 8. 2

### Условие задачи

У 50 испытуемых, протестированных по тесту Шмишека, определялся уровень гипертимности и дистимности (черты, связанные с преобладающим настроением, доминирующим эмоциональным «фоном»). Теоретически эти черты являются противоположными: гипертимность характеризует повышенное настроение, преобладание положительных эмоций, дистимность – наоборот. В то же время определение этих качеств основывается на ответах испытуемых на разные, по существу, вопросы.

### Экспериментальные данные:

№	Гип	Дис	№	Гип	Дис	№	Гип	Дис	№	Гип	Дис	№	Гип	Дис
1	4	2	11	0	5	21	4	1	31	4	4	41	2	2
2	3	0	12	2	1	22	5	0	32	2	1	42	5	2
3	2	5	13	1	7	23	5	1	33	2	1	43	3	2
4	1	3	14	2	2	24	1	5	34	2	4	44	5	0
5	5	5	15	1	5	25	6	4	35	1	3	45	4	5
6	3	3	16	1	1	26	3	4	36	0	3	46	3	3
7	3	3	17	3	3	27	2	3	37	5	0	47	5	0
8	2	1	18	6	1	28	3	5	38	2	3	48	4	2
9	3	4	19	1	3	29	2	3	39	1	2	49	4	2
10	5	0	20	4	1	30	5	0	40	1	4	50	4	3

### Задание

Подтвердить или опровергнуть версию о противоположности двух психологических черт – гипертимности и дистимности.

### Задача 8. 3

#### Условие задачи

У 10 испытуемых измерялся уровень нейротизма по тесту Айзенка и импульсивность по тесту Шмишека. Получены следующие результаты:

Испытуемый	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Нейротизм	12	19	11	13	20	17	8	15	18	16
Импульсивность	3	5	4	3	7	4	2	5	7	3

#### Задание

Определить наличие или отсутствие связи между нейротизмом и импульсивностью.

## ОТВЕТЫ НА ЗАДАЧИ

4.1. Квартили:  $Q_1 = 88$ ,  $Q_2 = 100,5$ ,  $Q_3 = 108$ .

Бимодальное распределение:  $Mo_1 = 88$ ,  $Mo_2 = 103$ .

$Md = 100,5$ ;  $IQ_{cp} = 99,1$ .

4.2. Средний балл успеваемости у девочек 3,75, у мальчиков - 3,58 (для усреднения данных необходимо воспользоваться средневзвешенным арифметическим значением).

4.3.  $x_g = 2,818$ .

5.1.  $T_{max} - T_{min} = 55$  мс;  $Q = 21$  мс;  $Q_{1/2} = 10,5$  мс;  $MD = 11,84$ ;  $\sigma_x^2 = 219,918$ ;  $\sigma_x = 14,830$ ;  $V_x = 10,17\%$ . Процентные соотношения частот в 8-классовом распределении 0, 0, 17, 43, 22, 14, 4, 0. Размах распределения составляет 3,71 стандартного отклонения.

5.2. Средние значения:  $x_1 = 35,2$ ;  $x_2 = 37,5$ .

Стандартные отклонения:  $\sigma_1 = 6,877$ ;  $\sigma_2 = 7,169$ .

Коэффициенты вариаций:  $V_1 = 0,195$  (19,5%);  $V_2 = 0,191$  (19,1%).

Средние значения и стандартные отклонения для первой группы испытуемых несколько ниже, чем для второй. Для коэффициентов вариации соотношения обратные.

6.1.  $As = 0,687 > As_{кр} = 0,53$ ;  $Ex = -0,496 < Ex_{кр} = 0,85$ . Для уровня значимости 0,95 распределение статистически достоверно отличается от нормального по коэффициенту асимметрии ( $As > As_{кр}$ ).

6.2.  $\chi^2 = 54,17 > \chi^2_{кр.} = 22,4$ ; 27,7; 34,5.  $\lambda = 1,66$ . По критерию хи-квадрат и критерию Колмогорова экспериментальное распределение статистически достоверно отличается от нормального.

6.3.  $T_{cp} = 130$  мс;  $\sigma_T = 15,275$ ;  $As = 0,631$ ;  $Ex = 0,558$ . По коэффициенту асимметрии распределение статистически достоверно отличается от нормального ( $As > As_{кр} = 0,39$ ), по показателю эксцесса – не отличается от такового ( $Ex < Ex_{кр} = 0,83$ ).

7.1.  $U = 133 < U_{кр.} = 138$ ;  $t = 1,92 < t_{кр.} = 2,03$ ;  $F = 3,68 < F_{кр.} = 4,10$ . По критерию Стьюдента и по критерию Фишера различия показателей нейротизма у юношей и девушек статистически недостоверны, по критерию Манна-Уитни – достоверны для 1-го уровня значимости. Очевидно, что в данном случае следует отдать приоритет параметрическим критериям и сделать общий вывод о недостоверности различий между двумя группами.

7.2.  $t = 1,28 < t_{кр.} = 2,00$ ;  $F = 1,76 < F_{кр.} = 4,01$ . Различия между показателями РДО у юношей и девушек статистически недостоверны.

7.3.  $U = U_{кр.}$ . По критерию Манна-Уитни различия между мальчиками и девочками по коэффициенту интеллекта лежат на границе достоверности.

8.1. Коэффициент корреляции между экстра-интроверсией и нейротизмом близок к нулю, что свидетельствует об отсутствии связи между этими характеристиками и подтверждает концепцию Г. Айзенка.

8.2.  $r_{xy} = -0,43 > r_{кр.} = 0,28$ . Вывод: гипертимность и дистимность, по Шмишеку, связаны между собой достоверной отрицательной связью.

8.3. Связь между импульсивностью и нейротизмом для данной выборки статистически достоверна для 2-го уровня значимости:  $r_{xy} = 0,786 > r_{кр.} = 0,77$ ).

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

### **Основная**

1. Гласс Дж., Стэнли Дж. Статистические методы в педагогике и психологии. – М.: Прогресс, 1976.
2. Суходольский Г. В. Основы математической статистики для психологов. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1972.
3. Артемьева Е. Ю., Мартынов Е. М. Вероятностные методы в психологии. – М.: Изд-во МГУ, 1975.
4. Сидоренко Е. В. Методы математической обработки в психологии. – СПб.: Соц. психол. центр, 1996.
5. Сидоренко Е. В. Методы математической обработки в психологии. – СПб: Речь, 2001. – 350 с.
6. Лупандин В. И. Математические методы в психологии. Уч. пособие. – Екатеринбург: УрГУ – УрГИ, 1996 (1-е изд.); Екатеринбург: гуманитарный университет, 1997 (2-е изд.); Екатеринбург: изд-во Урал. ун-та, 2002. – 208 с.
7. Лупандин В.И., Зайцев А.В. Сборник задач по курсу «Математические методы в психологии». Уч.-метод. пособие. – Екатеринбург, 2000.

### **Дополнительная**

1. Плохинский Н.А. Математические методы в биологии. Уч.-метод. пособие. – М.: Изд-во МГУ, 1978.
2. Вентцель Е.С. Теория вероятностей. – М., 1969.
3. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятности. – М.: Наука, 1974.
4. Боровков А.А. Теория вероятностей. – М.: Наука, 1976.
5. Боровков А.А. Математическая статистика. – М.: Наука, 1984.
6. Феллер Э. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1967. - Т. 1, 2.

### **Справочные пособия и таблицы**

1. Оуэн Д.Б. Сборник статистических таблиц. – М.: ВЦ АН СССР, 1973.
2. Большев А.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука, 1965.
3. Янко Я. Математико-статистические таблицы. – М.: Госстатиздат, 1961.

# **ПРИЛОЖЕНИЕ** **СТАТИСТИЧЕСКИЕ ТАБЛИЦЫ**

*Таблица I*

**Критические значения коэффициента асимметрии ( $A_s$ ),  
используемого для проверки гипотезы  
о нормальности распределения**

Объём выборки	Уровни Значимости		Объём выборки	Уровни значимости		Объём выборки	Уровни Значимости	
	0,95	0,99		0,95	0,99		0,95	0,99
25	0,71	1,06	100	0,39	0,57	500	0,18	0,26
30	0,66	0,98	125	0,35	0,51	550	0,17	0,24
35	0,62	0,92	150	0,32	0,46	600	0,16	0,23
40	0,59	0,87	175	0,30	0,43	650	0,16	0,22
45	0,56	0,82	200	0,28	0,40	700	0,15	0,22
50	0,53	0,79	250	0,25	0,36	750	0,15	0,21
60	0,49	0,72	300	0,23	0,33	800	0,14	0,20
70	0,46	0,67	350	0,21	0,30	850	0,14	0,20
80	0,43	0,63	400	0,20	0,28	900	0,13	0,19
90	0,41	0,60	450	0,19	0,27	1000	0,13	0,18

**Критические значения показателя эксцесса (Ex),  
используемого для проверки нормальности распределения**

Объем выборки	Уровни значимости			Объем выборки	Уровни значимости		
	0,90	0,95	0,99		0,90	0,95	0,99
10	0,89	0,91	0,94	60	0,84	0,84	0,86
15	0,87	0,89	0,91	70	0,83	0,84	0,86
20	0,86	0,88	0,90	80	0,83	0,84	0,85
25	0,86	0,87	0,89	90	0,83	0,84	0,85
30	0,85	0,86	0,88	100	0,83	0,83	0,85
35	0,85	0,86	0,88	200	0,82	0,82	0,83
40	0,84	0,85	0,87	300	0,81	0,82	0,83
45	0,84	0,85	0,87	400	0,81	0,82	0,82
50	0,84	0,85	0,86	500	0,81	0,81	0,82

**Теоретические частоты 8-классового нормального распределения  
("шаг" 1  $\sigma$ )**

Классовый интервал в единицах стандартного отклонения	Среднее значение интервала	Частоты	Накопленные частоты
$-4 \div -3 \sigma$	-3,5	0,13	0,13
$-3 \div -2 \sigma$	-2,5	2,15	2,28
$-2 \div -1 \sigma$	-1,5	13,59	15,87
$-\sigma \div 0$	-0,5	34,13	50,00
$0 \div 1 \sigma$	0,5	34,13	84,13
$1 \div 2 \sigma$	1,5	13,59	97,72
$2 \div 3 \sigma$	2,5	2,15	99,87
$3 \div 4 \sigma$	3,5	0,13	100,00

**Теоретические частоты 16-классового нормального распределения  
("шаг"  $0,5 \sigma$ )**

Классовый интервал в единицах стандартного отклонения	Среднее значение интервала	Частоты	Накопленные частоты
$-4,0 \div -3,5 \sigma$	-3,75	0,02	0,02
$-3,5 \div -3,0 \sigma$	-3,25	0,11	0,13
$-3,0 \div -2,5 \sigma$	-2,75	0,50	0,63
$-2,5 \div -2,0 \sigma$	-2,25	1,65	2,28
$-2,0 \div -1,5 \sigma$	-1,75	4,41	6,69
$-1,5 \div -1,0 \sigma$	-1,25	9,18	15,87
$-1,0 \div -0,5 \sigma$	-0,75	14,99	30,86
$-0,5 \sigma \div 0$	-0,25	19,14	50,00
$0 \div 0,5 \sigma$	0,25	19,14	69,14
$0,5 \div 1,0 \sigma$	0,75	14,99	84,13
$1,0 \div 1,5 \sigma$	1,25	9,18	93,31
$1,5 \div 2,0 \sigma$	1,75	4,41	97,72
$2,0 \div 2,5 \sigma$	2,25	1,65	99,37
$2,5 \div 3,0 \sigma$	2,75	0,50	99,87
$3,0 \div 3,5 \sigma$	3,25	0,11	99,98
$3,5 \div 4,0 \sigma$	3,75	0,02	100

**Значения z Пирсона и соответствующие им  
теоретические накопленные частоты**

Мера Пирсона (z)	Накоплен- ная частота (F)	Мера Пирсона (z)	Накоплен- ная частота (F)	Мера Пирсона (z)	Накоплен- ная частота (F)
-4,0	0	-1,3	9,69	1,4	91,92
-3,9	0	-1,2	11,51	1,5	93,31
-3,8	0	-1,1	13,57	1,6	94,51
-3,7	0,01	-1,0	15,87	1,7	95,54
-3,6	0,01	-0,9	18,41	1,8	96,40
-3,5	0,02	-0,8	21,19	1,9	97,12
-3,4	0,03	-0,7	24,20	2,0	97,72
-3,3	0,05	-0,6	27,43	2,1	98,21
-3,2	0,07	-0,5	30,86	2,2	98,60
-3,1	0,09	-0,4	34,46	2,3	98,92
-3,0	0,13	-0,3	38,21	2,4	99,18
-2,9	0,18	-0,2	42,08	2,5	99,37
-2,8	0,25	-0,1	46,02	2,6	99,53
-2,7	0,34	0	50,00	2,7	99,66
-2,6	0,47	0,1	53,98	2,8	99,75
-2,5	0,63	0,2	57,92	2,9	99,82
-2,4	0,82	0,3	61,79	3,0	99,87
-2,3	1,08	0,4	65,54	3,1	99,91
-2,2	1,40	0,5	69,14	3,2	99,93
-2,1	1,79	0,6	72,57	3,3	99,95
-2,0	2,28	0,7	75,80	3,4	99,97
-1,9	2,88	0,8	78,81	3,5	99,98
-1,8	3,60	0,9	81,59	3,6	99,99
-1,7	4,46	1,0	84,13	3,7	99,99
-1,6	5,49	1,1	86,14	3,8	100,00
-1,5	6,69	1,2	88,49	3,9	100,00
-1,4	8,08	1,3	90,31	4,0	100,00

## Стандартные значения хи-квадрат

Число степеней свободы	Уровни значимости		Число степеней свободы	Уровни значимости	
	0,95	0,99		0,95	0,99
1	3,841	6,635	30	43,773	50,892
2	5,991	9,210	31	44,985	52,191
3	7,815	11,345	32	46,194	53,486
4	9,488	13,277	33	47,400	54,776
5	11,070	15,086	34	48,602	56,061
6	12,592	16,812	35	49,802	57,342
7	14,067	18,475	36	50,998	58,619
8	15,507	20,090	37	52,192	59,892
9	16,919	21,666	38	53,384	61,162
10	18,307	23,209	39	54,572	62,428
11	19,675	24,725	40	55,758	63,691
12	21,026	26,217	42	58,124	66,206
13	22,362	27,688	44	60,481	68,709
14	23,685	29,141	46	62,830	71,201
15	24,996	30,578	48	65,2171	73,683
16	26,296	32,000	50	67,505	76,154
17	27,587	33,409	52	69,832	78,6163
18	28,869	34,805	54	72,153	81,069
19	30,144	36,191	56	74,468	85,513
20	31,410	37,566	58	76,778	85,950
21	32,671	38,932	60	79,082	88,379
22	33,924	40,289	65	84,821	94,422
23	35,172	41,638	70	90,631	100,425
24	36,415	42,980	75	96,217	106,393
25	37,652	44,314	80	101,879	112,329
26	38,885	45,642	85	107,522	118,236
27	40,113	46,963	90	113,145	124,116
28	41,337	48,278	95	118,752	129,973
29	42,557	49,588	100	124,342	135,807

**Уровень значимости различий  
между экспериментальным и теоретическим распределениями  
по критерию  $\lambda$  Колмогорова – Смирнова**

$\lambda$	$\beta$	$\lambda$	$\beta$	$\lambda$	$\beta$	$\lambda$	$\beta$
0,37	0,001	0,76	0,390	1,15	0,858	1,54	0,983
0,38	0,001	0,77	0,406	1,16	0,864	1,55	0,984
0,39	0,002	0,78	0,423	1,17	0,871	1,56	0,985
0,40	0,003	0,79	0,440	1,18	0,877	1,57	0,986
0,41	0,004	0,80	0,456	1,19	0,882	1,58	0,986
0,42	0,005	0,81	0,472	1,20	0,888	1,59	0,987
0,43	0,007	0,82	0,488	1,21	0,893	1,60	0,988
0,44	0,009	0,83	0,504	1,22	0,898	1,61	0,989
0,45	0,013	0,84	0,519	1,23	0,903	1,62	0,989
0,46	0,016	0,85	0,535	1,24	0,908	1,63	0,990
0,47	0,020	0,86	0,550	1,25	0,912	1,64	0,991
0,48	0,025	0,87	0,565	1,26	0,916	1,65	0,991
0,49	0,030	0,88	0,579	1,27	0,921	1,66	0,992
0,50	0,036	0,89	0,593	1,28	0,924	1,67	0,992
0,51	0,043	0,90	0,607	1,29	0,928	1,68	0,993
0,52	0,050	0,91	0,621	1,30	0,932	1,69	0,993
0,53	0,059	0,92	0,634	1,31	0,935	1,70	0,994
0,54	0,068	0,93	0,647	1,32	0,939	1,71	0,994
0,55	0,077	0,94	0,660	1,33	0,942	1,72	0,995
0,56	0,088	0,95	0,673	1,34	0,945	1,73	0,995
0,57	0,099	0,96	0,685	1,35	0,948	1,74	0,995
0,58	0,110	0,97	0,696	1,36	0,951	1,75	0,996
0,59	0,123	0,98	0,708	1,37	0,953	1,76	0,996
0,60	0,136	0,99	0,719	1,38	0,956	1,77	0,996
0,61	0,149	1,00	0,730	1,39	0,958	1,78	0,996
0,62	0,163	1,01	0,741	1,40	0,960	1,79	0,997
0,63	0,178	1,02	0,751	1,41	0,962	1,80	0,997
0,64	0,193	1,03	0,761	1,42	0,964	1,81	0,997
0,65	0,208	1,04	0,770	1,43	0,967	1,82	0,997
0,66	0,224	1,05	0,780	1,44	0,968	1,83	0,998
0,67	0,240	1,06	0,789	1,45	0,970	1,84	0,998
0,68	0,256	1,07	0,798	1,46	0,972	1,85	0,998
0,69	0,272	1,08	0,806	1,47	0,973	1,86	0,998
0,70	0,289	1,09	0,814	1,48	0,975	1,87	0,998
0,71	0,305	1,10	0,822	1,49	0,976	1,88	0,998
0,72	0,322	1,11	0,829	1,50	0,978	1,89	0,998
0,73	0,339	1,12	0,837	1,51	0,979	1,90	0,999
0,74	0,356	1,13	0,844	1,52	0,980	1,91	0,999
0,75	0,373	1,14	0,851	1,53	0,981	1,92	0,999

## Критические значения критерия Q Розенбаума

Уровень значимости 0,95																
<i>n</i>	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
11	6															
12	6	6														
13	6	6	6													
14	7	7	6	6												
15	7	7	6	6	6											
16	7	7	7	7	6	6										
17	7	7	7	7	7	7	7									
18	7	7	7	7	7	7	7	7								
19	7	7	7	7	7	7	7	7	7							
20	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7						
21	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7					
22	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7				
23	8	8	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7			
24	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7		
25	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	
26	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	7	7	7	7	7
Уровень значимости 0,99																
<i>n</i>	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
11	9															
12	9	9														
13	9	9	9													
14	9	9	9	9												
15	9	9	9	9	9											
16	9	9	9	9	9	9										
17	10	9	9	9	9	9	9									
18	10	10	9	9	9	9	9	9								
19	10	10	10	9	9	9	9	9	9							
20	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9						
21	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9					
22	11	11	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9				
23	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9			
24	12	11	11	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9		
25	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9	
26	12	12	11	11	10	10	10	10	10	9	9	9	9	9	9	9

**Критические значения критерия  $U$  Манна-Уитни  
для уровня значимости 0,95**

$n$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	0	1	2	4										
6	0	2	3	5	7									
7	0	2	4	6	8	11								
8	1	3	5	8	10	13	15							
9	1	4	6	9	12	15	18	21						
10	1	4	7	11	14	17	20	24	27					
11	1	5	8	12	16	19	23	27	31	34				
12	2	5	9	13	17	21	26	30	34	38	42			
13	2	6	10	15	19	24	28	33	37	42	47	51		
14	3	7	11	16	21	26	31	36	41	46	51	56	61	
15	3	7	12	18	23	28	33	39	44	50	55	61	66	72
16	3	8	14	19	25	30	36	42	48	54	60	65	71	77
17	3	9	15	20	26	33	39	45	51	57	64	70	77	83
18	4	9	16	22	28	35	41	48	55	61	68	75	82	88
19	4	10	17	23	30	37	44	51	58	65	72	80	87	94
20	4	11	18	25	32	39	47	54	62	69	77	84	92	100
$n$	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
4	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
5	19	20	22	23	25	26	28	29	31	32	33	35	36	38
6	25	26	28	30	32	34	36	37	39	41	43	45	47	48
7	30	33	35	37	39	41	44	46	48	50	53	55	57	59
8	36	39	41	44	47	49	52	55	57	60	62	65	68	70
9	42	45	48	51	54	57	60	63	66	69	72	75	79	82
10	48	51	55	58	62	65	69	72	75	79	82	86	89	93
11	54	57	61	65	69	73	77	81	85	89	93	96	100	104
12	60	64	68	72	77	81	85	90	94	98	103	107	111	116
13	65	70	75	80	84	89	94	99	103	108	113	118	122	127
14	71	77	82	87	92	97	102	107	113	118	123	128	133	139
15	77	83	88	94	100	105	111	116	122	128	133	139	144	150
16	83	89	95	101	107	113	119	125	131	137	143	150	156	162
17	89	96	102	109	115	121	128	134	141	147	154	160	167	173
18	95	102	109	116	123	130	136	143	150	157	164	171	178	185
19	101	109	116	123	130	138	145	152	160	167	174	182	189	196
20	107	115	123	130	138	146	154	161	169	177	185	193	200	208
21	113	121	130	138	146	154	162	170	179	187	195	203	212	220
22	119	128	136	145	154	162	171	180	188	197	206	214	223	232

**Стандартные значения критерия Стьюдента**

Число степеней свободы	Уровни значимости			Число степеней свободы	Уровни значимости		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
1	12,71	63,66	636,62	19	2,09	2,86	3,88
2	4,30	9,92	31,60	20	2,09	2,85	3,85
3	3,18	5,84	12,94	21	2,08	2,83	3,82
4	2,78	4,60	8,61	22	2,07	2,82	3,79
5	2,57	4,03	6,86	23	2,07	2,81	3,77
6	2,45	3,71	5,96	24	2,06	2,80	3,74
7	2,36	3,50	5,40	25	2,06	2,79	3,72
8	2,31	3,36	5,04	26	2,06	2,78	3,71
9	2,26	3,25	4,78	27	2,05	2,77	3,69
10	2,23	3,17	4,59	28	2,05	2,76	3,66
11	2,20	3,11	4,49	29	2,05	2,76	3,66
12	2,18	3,05	4,32	30	2,05	2,76	3,66
13	2,16	3,01	4,22	35	2,04	2,75	3,65
14	2,14	2,98	4,14	40	2,02	2,70	3,55
15	2,13	2,95	4,07	60	2,00	2,66	3,46
16	2,12	2,92	4,01	120	1,98	2,62	3,37
17	2,11	2,90	3,96	$\infty$	1,96	2,58	3,29
18	2,10	2,88	3,92				

**Стандартные значения критерия Фишера, используемые  
для оценки достоверности различий между двумя выборками**

Степени свободы (v)	Уровень значимости			Степени свободы (v)	Уровень значимости		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
3	10,13	34,12	167,5	28	4,20	7,64	13,5
4	7,71	21,20	74,1	29	4,18	7,60	13,4
5	6,61	16,26	47,0	30	4,17	7,56	13,3
6	5,99	13,74	35,5	32	4,15	7,50	13,2
7	5,59	12,25	29,2	34	4,13	7,44	13,1
8	5,32	11,26	25,4	36	4,11	7,39	13,0
9	5,12	10,56	22,9	38	4,10	7,35	12,9
10	4,96	10,04	21,0	40	4,08	7,31	12,8
11	4,84	9,65	19,7	42	4,07	7,27	12,7
12	4,75	9,33	18,6	44	4,06	7,24	12,5
13	4,67	9,07	17,8	46	4,05	7,21	12,4
14	4,60	8,86	17,1	48	4,04	7,19	12,3
15	4,54	8,68	16,6	50	4,03	7,17	12,2
16	4,49	8,53	16,1	55	4,02	7,12	12,1
17	4,45	8,40	15,7	60	4,00	7,08	12,0
18	4,41	8,28	15,4	65	3,99	7,04	11,9
19	4,38	8,18	15,1	70	3,98	7,01	11,6
20	4,35	8,10	14,8	80	3,96	6,96	11,6
21	4,32	8,02	14,6	100	3,94	6,90	11,5
22	4,30	7,94	14,4	125	3,92	6,84	11,4
23	4,28	7,88	14,2	150	3,91	6,81	11,3
24	4,26	7,82	14,0	200	3,89	6,76	11,2
25	4,24	7,77	13,9	400	3,86	6,70	11,0
26	4,22	7,72	13,7	1000	3,85	6,66	10,9
27	4,21	7,68	13,6	$\infty$	3,84	6,64	10,8

**Величины угла  $\varphi$  в радианах для разных процентных долей  
(угловое преобразование Фишера)**

% доля ( $P$ )	$\varphi$ , рад.	% доля ( $P$ )	$\varphi$ , рад.	% доля ( $P$ )	$\varphi$ , рад.	% доля ( $P$ )	$\varphi$ , рад.
0,1	0,063	17	0,850	51	1,591	85	2,346
0,2	0,090	18	0,876	52	1,611	86	2,375
0,3	0,110	19	0,902	53	1,631	87	2,404
0,4	0,127	20	0,927	54	1,651	88	2,434
0,5	0,142	21	0,952	55	1,671	89	2,466
0,6	0,155	22	0,976	56	1,691	90	2,498
0,7	0,168	23	1,000	57	1,711	90,5	2,515
0,8	0,179	24	1,024	58	1,732	91,0	2,532
0,9	0,190	25	1,047	59	1,752	91,5	2,550
1,0	0,200	26	1,070	60	1,772	92,0	2,568
1,5	0,246	27	1,093	61	1,793	92,5	2,587
2,0	0,284	28	1,115	62	1,813	93,0	2,606
2,5	0,318	29	1,137	63	1,834	93,5	2,626
3,0	0,348	30	1,159	64	1,855	94,0	2,647
3,5	0,376	31	1,181	65	1,876	94,5	2,668
4,0	0,403	32	1,202	66	1,896	95,0	2,691
4,5	0,428	33	1,224	67	1,918	95,5	2,714
5,0	0,451	34	1,245	68	1,939	96,0	2,739
5,5	0,474	35	1,266	69	1,961	96,5	2,765
6,0	0,495	36	1,287	70	1,982	97,0	2,793
6,5	0,516	37	1,308	71	2,004	97,5	2,824
7,0	0,536	38	1,328	72	2,026	98,0	2,896
7,5	0,555	39	1,349	73	2,049	99,0	2,941
8,0	0,574	40	1,369	74	2,072	99,1	2,952
8,5	0,592	41	1,390	75	2,094	99,2	2,962
9,0	0,609	42	1,410	76	2,118	99,3	2,974
9,5	0,627	43	1,430	77	2,141	99,4	2,987
10	0,644	44	1,450	78	2,165	99,5	3,000
11	0,676	45	1,471	79	2,190	99,6	3,015
12	0,708	46	1,491	80	2,214	99,7	3,032
13	0,738	47	1,511	81	2,240	99,8	3,052
14	0,767	48	1,531	82	2,265	99,9	3,078
15	0,795	49	1,551	83	2,292	100	3,142
16	0,823	50	1,571	84	2,319		

**Критические значения коэффициентов корреляции  
Пирсона и Спирмена**

Степени свободы $n - 2$	Уровень значимости		Степени свободы $n - 2$	Уровень значимости		Степени свободы $n - 2$	Уровень значимости	
	0,95	0,99		0,95	0,99		0,95	0,99
5	0,75	0,87	20	0,42	0,54	60	0,25	0,33
6	0,71	0,83	21	0,41	0,53	70	0,23	0,30
7	0,67	0,80	22	0,40	0,52	80	0,22	0,28
8	0,63	0,77	23	0,40	0,51	90	0,21	0,27
9	0,60	0,74	24	0,39	0,50	100	0,20	0,25
10	0,58	0,71	25	0,38	0,49	125	0,17	0,23
11	0,55	0,68	26	0,37	0,48	150	0,16	0,21
12	0,53	0,66	27	0,37	0,47	200	0,14	0,18
13	0,51	0,64	28	0,36	0,46	300	0,11	0,15
14	0,50	0,62	29	0,36	0,46	400	0,10	0,13
15	0,48	0,61	30	0,35	0,45	500	0,09	0,12
16	0,47	0,59	35	0,33	0,42	700	0,07	0,10
17	0,46	0,58	40	0,30	0,39	900	0,06	0,09
18	0,44	0,56	45	0,29	0,37	1000	0,06	0,09
19	0,43	0,55	50	0,27	0,35			

**Критические значения коэффициента  $\tau$  Кендалла**

Объем выборки	Уровни значимости			Объем выборки	Уровни значимости		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	0,91			13	0,43	0,56	0,71
6	0,77	0,98		14	0,41	0,54	0,68
7	0,71	0,87		15	0,39	0,51	0,65
8	0,61	0,79	0,99	16	0,38	0,49	0,62
9	0,56	0,72	0,91	17	0,36	0,47	0,60
10	0,51	0,67	0,84	18	0,35	0,46	0,58
11	0,48	0,63	0,79	19	0,34	0,44	0,56
12	0,45	0,59	0,75	20	0,33	0,43	0,54

**Число пар значений, достаточное для статистической значимости  
коэффициентов корреляции Пирсона и Спирмена**

$r$	Уровни значимости			$r$	Уровни значимости		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
0,01	38407	66503	108903	0,46	19	30	47
0,02	9603	16628	27228	0,47	18	29	45
0,03	4269	7392	12103	0,48	17	27	43
0,04	2403	4159	6809	0,49	16	26	41
0,05	1539	2263	4359	0,50	16	25	39
0,06	1069	1850	3028	0,51	15	24	37
0,07	787	1360	2225	0,52	15	23	36
0,08	604	1042	1704	0,53	14	22	34
0,09	477	824	1347	0,54	14	21	33
0,10	383	661	1081	0,55	13	20	32
0,11	317	548	896	0,56	13	20	30
0,12	267	462	754	0,57	12	19	29
0,13	228	392	640	0,58	12	18	28
0,14	196	337	550	0,59	11	18	27
0,15	171	295	481	0,60	11	17	26
0,16	151	259	422	0,61	11	16	25
0,17	133	228	373	0,62	10	16	24
0,18	119	204	332	0,63	10	15	23
0,19	107	183	297	0,64	10	15	22
0,20	97	165	270	0,65	9	14	21
0,21	87	149	242	0,66	9	14	20
0,22	80	136	211	0,67	9	13	20
0,23	73	124	202	0,68	9	13	19
0,24	68	114	185	0,69	8	12	18
0,25	62	105	170	0,70	8	12	18
0,26	57	97	157	0,71	8	11	17
0,27	53	90	145	0,72	8	11	16
0,28	49	83	135	0,73	7	11	16
0,29	46	78	125	0,74	7	10	15
0,30	43	73	117	0,75	7	10	15
0,31	40	68	109	0,76	7	10	14
0,32	38	63	102	0,77	7	9	14
0,33	36	60	96	0,78	7	9	13
0,34	34	56	90	0,79	6	9	13
0,35	32	53	85	0,80	6	9	12
0,36	30	50	80	0,81	6	8	12
0,37	28	47	75	0,82	6	8	11
0,38	27	44	71	0,83	6	8	11
0,39	26	42	67	0,84	6	7	10
0,40	24	40	64	0,85	5	7	10

0,41	23	38	60	0,86	5	7	10
0,42	22	36	57	0,87	5	7	9
0,43	21	34	55	0,88	5	7	9
0,44	20	33	52	0,89	5	6	8
0,45	19	31	49	0,90	5	6	8

## Критические значения дихотомического коэффициента корреляции

 $\phi$ 

Объем выборки	Уровни значимости			Объем выборки	Уровни значимости		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	0,88			26	0,39	0,51	0,65
6	0,81			28	0,38	0,49	0,63
7	0,75	0,98		30	0,36	0,48	0,61
8	0,70	0,92		35	0,34	0,44	0,56
9	0,66	0,86		40	0,31	0,41	0,53
10	0,62	0,82		45	0,30	0,39	0,50
11	0,60	0,78	1,00	50	0,28	0,37	0,47
12	0,57	0,75	0,95	60	0,26	0,34	0,43
13	0,55	0,72	0,92	70	0,24	0,31	0,40
14	0,53	0,69	0,88	80	0,22	0,29	0,37
15	0,51	0,67	0,85	90	0,21	0,28	0,35
16	0,49	0,65	0,83	100	0,20	0,26	0,33
17	0,48	0,63	0,80	125	0,18	0,24	0,30
18	0,47	0,61	0,78	150	0,17	0,22	0,27
19	0,45	0,60	0,76	175	0,15	0,20	0,25
20	0,44	0,58	0,74	200	0,14	0,19	0,24
22	0,42	0,56	0,71	250	0,13	0,17	0,21
24	0,41	0,53	0,68	500	0,09	0,12	0,15

## Границы критической области для критерия знаков

n	Уровни значимости				n	Уровни значимости				n	Уровни значимости				n	Уровни значимости			
	0,95		0,99			0,95		0,99			0,95		0,99			0,95		0,99	
5	0	5	0	5	29	9	20	8	21	53	19	34	17	36	77	30	47	27	50
6	1	5	0	6	30	10	20	8	22	54	20	34	18	36	78	30	48	28	50
7	1	6	0	7	31	10	21	8	23	55	20	35	18	37	79	31	48	28	51
8	1	7	1	7	32	10	22	9	23	56	21	35	18	38	80	31	49	29	51
9	2	7	1	8	33	11	22	9	24	57	21	36	19	38	81	32	49	29	52
10	2	8	1	9	34	11	23	10	24	58	22	36	19	39	82	32	50	29	53
11	2	9	1	10	35	12	23	10	25	59	22	37	20	39	83	33	50	30	53
12	3	9	2	10	36	12	24	10	26	60	22	38	20	40	84	33	51	30	54
13	3	10	2	11	37	13	24	11	26	61	23	38	21	40	85	33	52	31	54
14	3	11	2	12	38	13	25	11	27	62	23	39	21	41	86	34	52	31	55
15	4	11	3	12	39	13	26	12	27	63	24	39	21	42	87	34	53	32	55
16	4	12	3	13	40	14	26	12	28	64	24	40	22	42	88	35	53	32	56
17	5	12	3	14	41	14	27	12	29	65	25	40	22	43	89	35	54	32	57
18	5	13	4	14	42	15	27	13	29	66	25	41	23	43	90	36	54	33	57
19	5	14	4	15	43	15	28	13	30	67	26	41	23	44	91	36	55	33	58
20	6	14	4	16	44	16	28	14	30	68	26	42	23	45	92	37	55	34	58
21	6	15	5	16	45	16	29	14	31	69	26	43	24	45	93	37	56	34	59
22	6	16	5	17	46	16	30	14	32	70	27	43	24	46	94	38	56	35	59
23	7	16	5	18	47	17	30	15	32	71	27	44	25	46	95	38	57	35	60
24	7	17	6	18	48	17	31	15	33	72	28	44	25	47	96	38	58	35	61
25	8	17	6	19	49	18	31	16	33	73	28	45	26	47	97	39	58	36	61
26	8	18	7	19	50	18	32	16	34	74	29	45	26	48	98	39	59	36	62
27	8	19	7	20	51	19	32	16	35	75	29	46	26	49	99	40	59	37	62
28	9	19	7	21	52	19	33	17	35	76	29	47	27	49	100	40	60	37	63

**Критические значения критерия Т Вилкоксона**

Объем выборки			Объем выборки		
	0,95	0,99		0,95	0,99
5	0	-	28	130	101
6	2	-	29	140	110
7	3	0	30	151	120
8	5	1	31	163	130
9	8	3	32	175	140
10	10	5	33	187	151
11	13	7	34	200	162
12	17	9	35	213	173
13	21	12	36	227	185
14	25	15	37	241	198
15	30	19	38	256	211
16	35	23	39	271	224
17	41	27	40	286	238
18	47	32	41	302	252
19	53	37	42	319	266
20	60	43	43	336	281
21	67	49	44	353	296
22	75	55	45	371	312
23	83	62	46	389	328
24	91	69	47	407	345
25	100	76	48	426	362
26	110	84	49	446	379
27	119	92	50	466	397

**Таблицы Фишера, используемые для одно- и двухфакторного  
дисперсионного анализа ( $\beta_1 = 0,95$ )**

v <sub>2</sub>	v <sub>1</sub>									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78
4	3	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	7,71	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74
6	6,61	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,99	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63
8	5,59	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34
9	5,32	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13
10	5,12	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97
11	4,96	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86
12	4,84	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76
13	4,75	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67
14	4,67	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60
15	4,60	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55
16	4,54	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,49	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45
18	4,45	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,41	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,55	2,48	2,43	2,38
20	4,38	3,49	3,10	287	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35
21	4,35	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32
22	4,32	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,47	2,40	2,35	2,30
23	4,30	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,45	2,38	2,32	2,28
24	4,28	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26
25	4,26	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,41	2,34	2,28	2,24
26	4,24	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
27	4,22	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,30	2,25	2,20
28	4,21	3,34	2,95	2,71	2,56	2,44	2,36	2,29	2,24	2,19
29	4,20	3,33	2,93	2,70	2,54	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18
30	4,18	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16
32	4,17	3,30	2,90	2,67	2,51	2,40	2,32	2,25	2,19	2,14
34	4,15	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,30	2,23	2,17	2,12
36	4,13	3,26	2,86	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,10
38	4,11	3,25	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09
40	4,10	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07
42	4,08	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06
44	4,07	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05
46	4,06	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,14	2,09	2,04
48	4,05	3,19	2,80	2,56	2,41	2,30	2,21	2,14	2,08	2,03
50	4,04	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02
55	4,03	3,17	2,78	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,05	2,00
60	4,02	3,15	2,76	2,52	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99

v <sub>2</sub>	v <sub>1</sub>									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
65	4,00	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,02	1,98
70	3,99	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,01	1,97
80	3,98	3,11	2,72	2,48	2,33	2,21	2,12	2,05	1,99	1,95
100	3,96	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92
125	3,94	3,07	2,68	2,44	2,29	2,17	2,08	2,01	1,95	1,90
150	3,92	3,06	2,67	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89
200	3,91	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87
400	3,89	3,02	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85
1000	3,86	3,00	2,61	2,38	2,22	2,10	2,02	1,95	1,89	1,84
∞	3,85 3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83